



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

ESTUDO DO FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA EM POÇOS DE PETRÓLEO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por
Gustavo Silva Vaz Gontijo

Brasília, 10 de Julho de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

ESTUDO DO FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA EM POÇOS DE PETRÓLEO USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Por

Gustavo Silva Vaz Gontijo

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Éder Lima de Albuquerque, UnB/ ENM
(Orientador)

Prof. Eugênio Fortaleza, UnB/ ENM (Co-orientador)

Prof. Gustavo Coelho Abade, UnB/ ENM

Brasília, 10 de Julho de 2013

Dedicatória

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Marcus Vinícius e Desirée, ao meu
padrasto William e minha madrastra
Cleusa, sem os quais eu não seria a
pessoa que sou hoje.*

Agradecimentos

O autor gostaria de agradecer:

A ANP (Agência Nacional do Petróleo) e a empresa Chevron Brasil Upstream Frade Ltda., que através do projeto "Controle de injeção de água em reservatórios de petróleo" deu suporte e financiamento ao presente estudo.

Ao professor Éder Lima de Albuquerque, pela contribuição à minha formação tanto em disciplinas ministradas quanto na orientação deste trabalho. Este trabalho não teria sido possível sem sua transmissão de conhecimentos sobre o Método dos Elementos de Contorno e seu apoio constante.

Ao professor Geraldo Carvalho Brito Jr., da Universidade Estadual do Oeste do Paraná, onde iniciei a graduação em Engenharia Mecânica, pelo privilégio de ter sido seu aluno e por ter sido um exemplo de caráter acadêmico e profissional.

A minha esposa, Ingrid, pelo apoio incondicional durante toda a minha formação acadêmica e, mais ainda, durante a execução deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre o fenômeno do cone de água em poços de petróleo. O escopo do trabalho é a modelagem numérica do fenômeno utilizando o método dos elementos de contorno. Neste relatório, é realizada uma revisão acerca do fenômeno do cone de água e do modelo matemático utilizado na pesquisa. Além disso, é realizada uma análise a respeito da integração analítica das matrizes de influência da formulação do método dos elementos de contorno de modo a fundamentar o benefício deste tipo de integração no desempenho dos algoritmos e, conseqüentemente, no custo computacional do método. É feita uma revisão acerca da formulação do método dos elementos de contorno para sub-regiões. Esta formulação é validada comparando seus resultados com resultados analíticos. É desenvolvido um código utilizando elementos de contorno lineares contínuos, com sub-regiões, para simular o fenômeno do cone de água. Os resultados obtidos com a simulação são fisicamente coerentes, porém os mesmos não foram comparados com resultados analíticos ou experimentais de referência.

ABSTRACT

This paper presents a study on the water coning phenomenon in oil wells. The scope of the work is the numerical modeling of the phenomenon using the boundary elements method. In this report, a review is made about the water coning phenomenon and the mathematical model used in the research. Also, an analysis is performed with respect to the analytical integration of the influence matrices of the boundary elements method formulation, in order to substantiate the benefits of this kind of integration in the algorithms performance and, consequently, in the computational cost of the method. It is made a review of the sub-regions formulation of the boundary elements method. This formulation is validated by comparison between its results and analytical results. A numerical code is developed using continuous linear boundary elements, with sub-regions, to simulate the water coning phenomenon. The results of the simulation are physically coherent, but they were not compared with analytical or experimental results.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	O cone de água	1
1.2	O Método dos Elementos de Contorno	1
1.3	Objetivo do trabalho	1
2	O fenômeno do cone de água	3
2.1	O reservatório de petróleo	3
2.2	O cone de água	4
3	Modelo adotado.....	8
3.1	A lei de Darcy.....	8
3.2	A equação governante	10
3.3	Condições de contorno	11
3.3.1	Problema de superfície livre.....	11
3.3.2	Problema de dois fluidos	12
3.4	Considerações sobre a velocidade	13
4	O Método dos Elementos de Contorno	14
4.1	Uma breve introdução	14
4.1.1	Modelos matemáticos.....	14
4.1.2	Métodos numéricos	14
4.2	Soluções fundamentais	15
4.2.1	Solução fundamental do potencial	16
4.2.2	Solução fundamental do fluxo	17
4.3	A equação integral de contorno.....	18
4.4	Discretização das equações	25
4.5	Elementos de contorno constantes	26
4.6	Método de solução.....	27
4.6.1	Cálculo do potencial e do fluxo no contorno	28
4.6.2	Cálculo do potencial e do fluxo em pontos internos	29
4.7	Elementos de contorno lineares contínuos	29
4.8	Integração das matrizes de influência	32

5	Integração analítica das matrizes de influência H e G	33
5.1	Análise qualitativa das integrações	33
5.2	Integração analítica das matrizes.....	34
5.2.1	Sistema de coordenadas local.....	34
5.2.2	Desenvolvimento analítico da integral para $g1$	35
5.2.3	Desenvolvimento analítico da integral para $g2$	39
5.2.4	Desenvolvimento analítico da integral para $h1$	40
5.2.5	Desenvolvimento analítico da integral para $h2$	41
6	Formulação do Método dos Elementos de Contorno para sub-regiões	43
6.1	Fundamentação teórica.....	43
6.1.1	Interface entre dois fluidos imiscíveis.....	44
6.1.2	Método de validação	44
6.2	Equacionamento	44
6.3	Validação da formulação para sub-regiões	47
7	Código para simulação do fenômeno do cone de água	51
7.1	Condições de contorno	51
7.1.1	Condições de contorno do reservatório	51
7.1.2	Equações de acoplamento da interface	53
7.2	Movimentação da interface	54
7.3	Método de solução.....	55
7.4	Resultados obtidos.....	56
7.5	Análise dos resultados	58
8	Conclusões e trabalhos futuros	59
	Referências bibliográficas.....	61

LISTA DE FIGURAS

1.1	Célula de Hele-Shaw	2
2.1	Esquema de um reservatório.....	4
2.2	Campo de pressão	5
3.1	Experimento de Darcy	8
3.2	Aspecto geral do problema de superfície livre	11
3.3	Aspecto geral do problema de dois fluidos	12
4.1	Pontos fonte e campo.....	16
4.2	Modificação do contorno	21
4.3	Ângulos interno e externos	24
4.4	Discretização do contorno	25
4.5	Aproximação dos elementos reais por elementos de contorno	26
4.6	Elemento de contorno constante.....	26
4.7	Placa plana	27
4.8	Elemento de contorno linear contínuo.....	30
4.9	Funções de forma	30
5.1	Sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas	34
5.2	Projeções de r_1 e r_2 na direção tangencial	37
6.1	Domínio composto por duas sub-regiões.....	43
6.2	Problema de duas sub-regiões.....	45
6.3	Geometria e condições de contorno do problema analisado	47
6.4	Resultados obtidos com a formulação de domínio único e homogêneo	48
6.5	Resultados obtidos com a formulação de sub-regiões	49
6.6	Resultados obtidos com a formulação de sub-regiões e erros relativos	50
7.1	Reservatório considerado.....	52
7.2	Geometria e condições de contorno do problema simulado.....	57
7.3	Posição da interface ao final do tempo de análise	57
7.4	Posição do ponto central da interface ao longo do tempo	58

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Área	[m ²]
g	Aceleração da gravidade	[m/s ²]
k	Permeabilidade absoluta do meio poroso	[darcy]
K	Condutividade hidráulica do meio	[m/s]
p	Pressão	[Pa]
q	Velocidade de descarga	[m/s]
Q	Fluxo volumétrico	[m ³ /s]
u_f	Velocidade do fluido	[m/s]

Símbolos Gregos

Φ	Altura piezométrica (potencial de velocidade)	[m]
δ	Função delta de Dirac	
ρ	Massa específica do fluido	[kg/m ³]
θ	Porosidade do meio	[-]
μ	Viscosidade dinâmica do fluido	[kg/m.s]

Sobrescritos

*	Solução fundamental
—	Condição de contorno prescrita

Subscritos

d	Relativo ao ponto fonte
o	Relativo ao óleo
w	Relativo à água

Siglas

MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos

1 INTRODUÇÃO

1.1 O CONE DE ÁGUA

O fenômeno do cone de água é um fator limitante na produtividade de um poço de petróleo. Este fenômeno, que será melhor explicado no capítulo 2, ocorre em decorrência do gradiente de pressão aplicado pelo poço com o objetivo de extrair o petróleo do reservatório.

Em poucas palavras, o gradiente de pressão atinge ambos os fluidos (petróleo e água) e como a água tem maior mobilidade que o petróleo, a mesma tende a fluir em direção ao poço, tomando a forma de um cone.

Para certos valores de vazão, o cone de água atinge a extremidade do poço, fazendo com que água seja produzida ao invés de petróleo, diminuindo a produtividade. Inúmeros trabalhos se dedicam a estudar este fenômeno, buscando uma solução analítica para a sua descrição.

1.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O método dos elementos de contorno é uma ferramenta de análise numérica que vem sendo utilizada na modelagem do problema de extração de petróleo e de formação do cone de água. A análise numérica é mais rápida e barata que a análise experimental, sendo muito utilizada na fase de projetos e dimensionamento de poços de petróleo, porém, para que a ferramenta numérica seja útil, é necessário um investimento em algoritmos eficientes, principalmente em se tratando de problemas de larga escala, onde milhões de graus de liberdade são considerados.

A montagem das matrizes de influência (H e G) é responsável pela maior parte do tempo de processamento do código do método dos elementos de contorno. Portanto, a forma como esta matriz é calculada tem impacto direto no custo computacional da análise numérica.

A integração analítica destas matrizes não só torna o método mais rápido e eficiente que quando se faz integração numérica, mas também elimina uma série de questões relativas ao número de pontos de integração ideal para se obter boa precisão na integração.

1.3 OBJETIVO DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é implementar a formulação do método dos elementos de contorno em um código numérico que permita analisar o fenômeno do cone de água ocorrido durante a extração de

petróleo. É considerado o bombeamento contínuo em reservatórios homogêneos e isotrópicos, contendo petróleo e água, utilizando a formulação de sub-regiões.

Neste relatório, é apresentada uma revisão acerca do fenômeno do cone de água e do modelo utilizado na pesquisa. Além disso, é realizada uma análise qualitativa a respeito da integração analítica das matrizes de influência da formulação do método dos elementos de contorno, confrontada com a integração numérica, buscando fundamentar o benefício daquele tipo de integração no desempenho dos algoritmos e consequentemente no custo computacional do método. É realizada a validação da formulação do método dos elementos de contorno para sub-regiões, de forma a homologar esta ferramenta que será utilizada na simulação do fenômeno do cone de água. Finalmente, são mostradas as características do código desenvolvido, bem como os resultados obtidos com a sua aplicação.

Os resultados obtidos com o código desenvolvido poderão ser comparados futuramente com resultados experimentais obtidos com a célula de Hele-Shaw mostrada na Fig. 1.1.



Figura 1.1 – Célula de Hele-Shaw

Na Fig. 1.1, a célula de Hele-Shaw está sendo utilizada para simular o problema de extração de um fluido com superfície livre. Este mesmo equipamento pode ser utilizado para simular o problema estudado neste trabalho, possibilitando a comparação dos resultados aqui obtidos.

2 O FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA

2.1 O RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO

Um reservatório de petróleo é um meio poroso, permeável, que normalmente está aprisionado por uma rocha impermeável acima e uma rocha semipermeável abaixo. Dentro do reservatório, normalmente se encontram água e petróleo (e, algumas vezes, gás) em equilíbrio estático.

De acordo com Thomas (2004), o processo de formação do petróleo inicia-se nas camadas de rocha sedimentares localizadas em profundidade superior à do reservatório. Uma vez formado o petróleo, o mesmo escoa por rochas semipermeáveis até encontrar um bolsão de rocha porosa que está aprisionado por rochas impermeáveis. Este bolsão gradativamente se enche de petróleo e se torna, então, um reservatório. O processo natural de enchimento do reservatório faz com que o mesmo fique pressurizado. Existe, então, no reservatório, um campo de pressão que varia com a coordenada z , altura, e é dado por:

$$P_{natural}(z) = \rho g(h - z) + p_{reservatório} \quad (2.1)$$

onde $P_{natural}$ é o campo de pressão do reservatório, h é a altura da coluna de fluido, z é a coordenada do ponto onde se está calculando a pressão e $p_{reservatório}$ é a magnitude da pressão proveniente do processo de formação do reservatório, ou seja, é a pressão ambiente do reservatório.

Para extrair petróleo de um reservatório, um poço é perfurado no solo, passando através de várias camadas de rocha até chegar no meio poroso que contém o petróleo, conforme mostrado na Fig. 2.1. O poço se caracteriza, então, pelo duto escavado desde a superfície até a zona de óleo do reservatório e suas paredes são recobertas de metal para garantir a estabilidade estrutural necessária.

Em um primeiro estágio de produção de petróleo, o reservatório está naturalmente pressurizado, com a pressão dada pela Eq.(2.1) superior à pressão atmosférica. Isso faz com que o interior do poço esteja a uma pressão menor que a do reservatório e o petróleo naturalmente flui para o interior do poço, viajando até a superfície. Com o avanço da produção, a pressão interna do reservatório cai, chegando ao caso em que o petróleo não consegue mais ser extraído desta forma passiva. Neste ponto, a diferença de pressão necessária ao escoamento passa a ser garantida por meio de bombeamento.

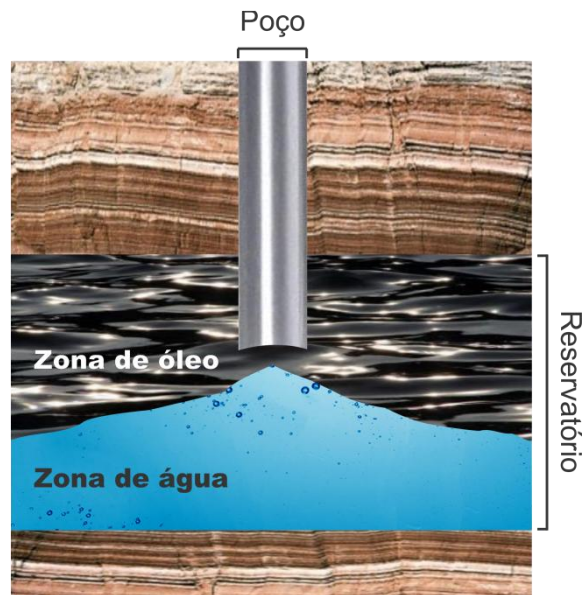


Figura 2.1 - Esquema de um reservatório

2.2 O CONE DE ÁGUA

A baixa pressão na extremidade do poço induzida pelo bombeamento (ou pela comunicação da pressão atmosférica no primeiro estágio de produção) introduz um gradiente de pressão dentro do reservatório, que afeta ambos os fluidos, água e óleo. Este campo de pressão induzido, segundo Kikuchi (1997) é de decaimento radial, em todas as direções.

A pressão resultante no reservatório é a soma dos dois campos de pressão, ilustrados na Fig. 2.2; o campo de pressão natural do reservatório e o campo de pressão induzido pelo bombeamento.

Água e petróleo têm densidades e viscosidades diferentes. Segundo Cavalcante (1996), a mobilidade é inversamente proporcional à viscosidade. A água tem, então, maior mobilidade que o petróleo. De acordo com Kikuchi (1997), nesta diferença de mobilidade reside o cerne do fenômeno do cone de água, pois este é um dos fatores que mais o influencia.

Ao mesmo tempo em que tem a função de impelir o petróleo para o interior do poço, o gradiente de pressão resultante gera o efeito colateral de causar a tendência da água se encaminhar para o poço. Esse efeito gera o fenômeno do cone d'água, pois, devido à movimentação da água em direção ao poço, a superfície de interface entre os fluidos toma a forma de uma cônica, que é a forma das linhas isobáricas do campo de pressão resultante no reservatório.

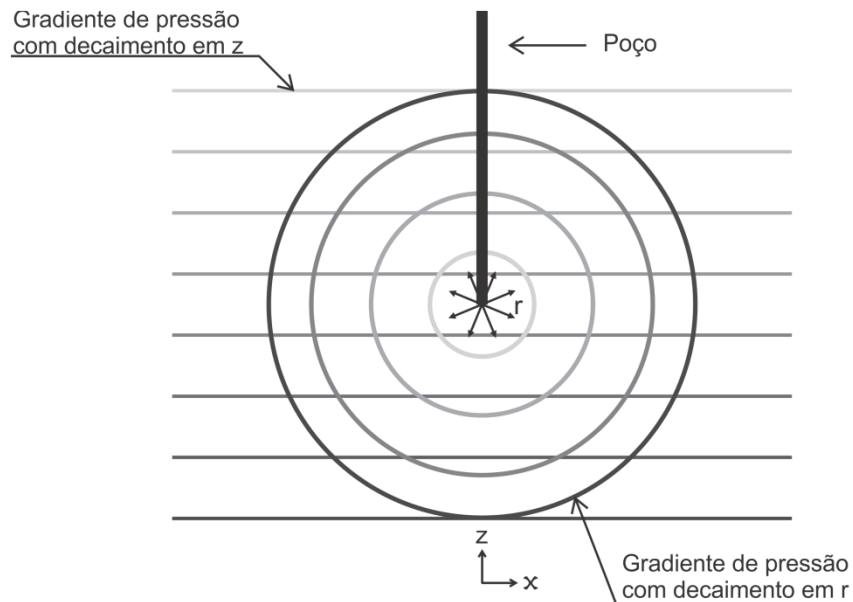


Figura 2.2 - Campo de pressão: cores mais escuras indicam pressões maiores

Uma maneira de obter um melhor entendimento do fenômeno é fazendo uma analogia com um sistema tecido-ar, onde se tem uma lâmina de tecido de área de superfície infinita em repouso sobre uma superfície horizontal. Ao puxar o tecido para cima, com os dedos, através de um único ponto, o tecido toma a forma de um cone e cria-se um espaço vazio sob o mesmo. O ar que está abaixo do tecido tem mais facilidade para se movimentar para cima e preencher este espaço vazio do que as laterais do tecido para se movimentarem lateralmente para preencher o mesmo espaço. Logo, como o ar tem maior mobilidade que o tecido, ele preenche o vazio, formando-se ali um cone de ar. Note que a superfície do tecido, suspensa por seus dedos, estará em equilíbrio estático, bem como o cone de ar abaixo dele, enquanto seus dedos o estiverem segurando na mesma posição. Ao soltá-lo, o sistema tecido-ar retorna à posição original.

O fenômeno do cone de água é análogo ao descrito acima: enquanto o petróleo é extraído pelo poço, a água que se encontra abaixo da zona de óleo tem mais facilidade para preencher o espaço deixado pela movimentação do óleo do que o próprio óleo que se encontra na lateral do vazio.

A altura do cone de água é uma função da pressão de sucção na extremidade do poço, que por sua vez, dita a vazão de petróleo no poço. Logo, a altura do cone de água é função da vazão de petróleo. Existe, então, uma vazão na qual a altura do cone é tal que a sua ponta atinge o poço e, neste momento, água passa a ser extraída junto com o petróleo. A esta vazão é dado o nome de vazão crítica. Mantidas todas as demais variáveis constantes, a vazão crítica de um poço é inversamente proporcional à viscosidade do petróleo. De fato, isso pode ser inferido da análise do número de Froude do escoamento, dado pela Eq.(2.2).

$$F = \frac{Q\mu_{\text{óleo}}}{kH(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{óleo}})g} \quad (2.2)$$

O número de Froude é um número adimensional que expressa a razão entre a força de sucção do sumidouro e a força gravitacional. Na expressão do número de Froude (Eq. 2.2), Q é a vazão volumétrica, $\mu_{\text{óleo}}$ é a viscosidade dinâmica do óleo e k é a permeabilidade absoluta do meio poroso. H representa a escala característica de comprimento e $\rho_{\text{água}}$ e $\rho_{\text{óleo}}$ representam as massas específicas da água e do óleo, respectivamente. Há ainda a constante g , que representa a aceleração da gravidade.

A produção de água em um poço de petróleo é algo extremamente prejudicial. Além de não estar extraído petróleo, o que por si só diminui a produtividade do poço, a água que é extraída deve ser tratada antes de ser descartada, porque é contaminada por alta salinidade, resíduos químicos devido aos processos de perfuração e produção, óleo em suspensão, metais pesados e, algumas vezes, uma certa taxa de radioatividade. O tratamento da água produzida é oneroso e, dependendo da quantidade de água produzida, pode inviabilizar a operação de um poço.

Existem várias abordagens para tentar contornar o problema de produção da água. Uma das alternativas é o bombeamento pulsado, no qual durante um curto intervalo de tempo, o petróleo é bombeado a uma vazão superior à crítica, porém, antes que a interface óleo-água atinja o poço o bombeamento cessa, fazendo a interface voltar novamente à condição de repouso. Foi mostrado por Zhang (1999) que, para curtos períodos de exploração do reservatório, o bombeamento pulsado supera em produtividade o bombeamento contínuo.

Outra forma de prevenir a produção de água é alterar a sua mobilidade, tornando-a não tão suscetível a formar um cone significativamente perigoso para a produção de óleo. Tal objetivo pode ser conseguido com a injeção de polímeros hidrossolúveis que tornam a água mais viscosa.

O principal esforço, entretanto, se concentra no entendimento do comportamento da superfície óleo-água. Para isto, vários modelos analíticos, experimentais e numéricos já foram propostos e testados. Os modelos analíticos utilizam as equações diferenciais que governam o problema, que no caso do cone de água é a equação de Darcy, que descreve o escoamento de fluidos em meios porosos. Estes modelos, porém, utilizam em sua concepção simplificações das equações de forma a permitir um tratamento matemático que as solucione. O resultado, portanto, só é válido para analisar casos em que as simplificações são consideradas válidas. Um modelo analítico, portanto, é normalmente aplicado a um caso específico, por exemplo, a um reservatório de petróleo específico com determinadas condições de operação (normalmente, em regime permanente).

Neste viés entram as vantagens do modelo numérico. Como as equações serão resolvidas numericamente, sem a necessidade de se obter uma equação que explique o comportamento do objeto de estudo, os modelos numéricos não necessitam de simplificações nas equações governantes do problema e podem, assim, ter uma aplicação mais geral. Um modelo numérico, normalmente, pode ser utilizado para estudar reservatórios e poços com características diferentes, além de permitir o estudo de regimes transientes. Por causa de suas características, modelos numéricos têm ganhado cada vez

mais espaço no estudo de fenômenos complexos com o avanço da capacidade de processamento dos computadores.

Da mesma forma que os modelos analíticos, os resultados obtidos com os modelos numéricos devem ser confrontados com resultados experimentais para colocar em prova a sua fidelidade ao fenômeno estudado.

3 MODELO ADOTADO

Para o estudo do problema, o modelo adotado foi o de escoamento potencial bidimensional em regime permanente. A região do escoamento é um meio poroso homogêneo e com permeabilidade isotrópica. O fluido é considerado incompressível.

3.1 A LEI DE DARCY

Segundo Bear (1972), o escoamento de fluidos em meios porosos é regido pela lei de Darcy. Henry Darcy, em 1856, demonstrou através de experimentos com o aparato mostrado na Fig. 3.1, que:

$$Q = \frac{KA(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (3.1)$$

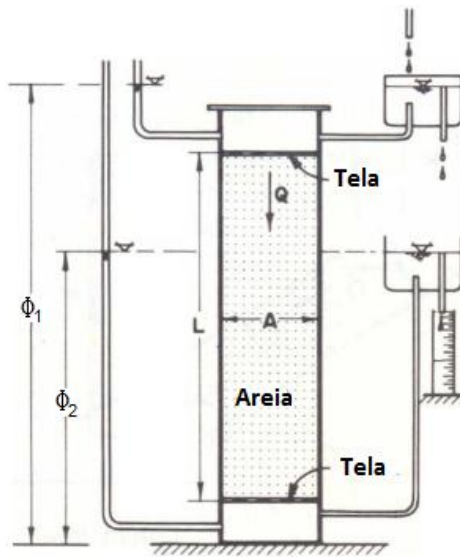


Figura 3.1 - Experimento de Darcy. Fonte: Bear (1972)

Na Eq.(3.1), Q é a vazão volumétrica, A é a área de seção transversal, L é o comprimento a ser atravessado pelo fluido, Φ_1 e Φ_2 são as alturas piezométricas das seções de início e fim do escoamento e K é a condutividade hidráulica do meio, dada, segundo Bear (1972), por:

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (3.2)$$

onde k é a permeabilidade absoluta da matriz porosa, ρ é a densidade do fluido, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e g é a aceleração da gravidade.

A fim de se obter a vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal (ou a velocidade de descarga), pode-se dividir ambos os lados da Eq.(3.1) por A , fazendo:

$$q = \frac{K(\Phi_1 - \Phi_2)}{L} \quad (3.3)$$

onde q é a velocidade de descarga ou velocidade média do escoamento.

Reorganizando os termos da Eq.(3.3), tem-se:

$$q = \frac{-K(\Phi_2 - \Phi_1)}{L} \quad (3.4)$$

Disso vem:

$$q = \frac{-K\Delta\Phi}{L} \quad (3.5)$$

Fazendo o comprimento L tão pequeno quanto se queira, tem-se:

$$q = -K \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (3.6)$$

em que x é a coordenada da direção do escoamento.

Considerando o escoamento tridimensional, tem-se:

$$\mathbf{q} = -K\nabla\Phi \quad (3.7)$$

A Eq.(3.7) mostra que a velocidade de descarga do fluido, \mathbf{q} , está linearmente relacionada (através da condutividade hidráulica do meio), com o gradiente de uma função potencial. Esta função é o potencial de velocidade do escoamento e neste modelo é dado pela altura piezométrica, que, de acordo com Liggett e Liu (1983), para o modelo adotado, é dada por:

$$\Phi = \frac{p}{\rho g} + z \quad (3.8)$$

3.2 A EQUAÇÃO GOVERNANTE

Pelo princípio de conservação da massa, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (3.9)$$

Para um fluido incompressível, substituindo a Eq.(3.7) na Eq.(3.9), obtemos:

$$\nabla \cdot (-K \nabla \Phi) = 0 \quad (3.10)$$

Se o meio é homogêneo, então, K é uma constante. Desta forma, pode-se escrever:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.11)$$

A Eq.(3.11) é a equação de Laplace, que governa o escoamento de um fluido em um meio poroso.

Para o caso da existência de um sumidouro, como no caso estudado, a aplicação do princípio de conservação da massa sobre a Eq.(3.7) gera:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = -Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq.(3.7) na Eq.(3.12) tem-se:

$$\nabla \cdot (-K \nabla \Phi) = -Q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.13)$$

E disso, vem:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{Q}{K} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3.14)$$

onde δ é a função delta de Dirac e \mathbf{x}_0 é o vetor posição do sumidouro.

A Eq.(3.14) implica que o laplaciano da função potencial é zero em todo o domínio (tornando-se a equação de Laplace) exceto no ponto onde está localizado o sumidouro (tornando-se a equação de Poisson).

Assim sendo, a equação diferencial governante do problema é a equação de Laplace (ou a equação de Poisson, para casos com fontes ou sumidouros), que, além do escoamento em meios porosos, governa a transferência de calor por condução em sólidos, o fluxo de eletricidade e diversos outros fenômenos físicos.

3.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

A abordagem utilizada nesta pesquisa permite o tratamento de dois tipos de problema. Um deles é o problema do escoamento de um fluido com superfície livre, aqui denominado *problema de superfície livre*. O outro tipo é o problema do escoamento de dois fluidos imiscíveis, com massas específicas e viscosidades distintas, aqui denominado *problema de dois fluidos*. Uma combinação entre ambos os casos também é passível de estudo utilizando o mesmo modelo adotado, desde que aplicadas as condições de contorno pertinentes.

Apesar de este trabalho tratar apenas do problema de dois fluidos, esta seção mostra as condições de contorno para ambos os casos.

3.3.1 PROBLEMA DE SUPERFÍCIE LIVRE

A Fig. 3.2 mostra o aspecto geral de um problema de superfície livre.

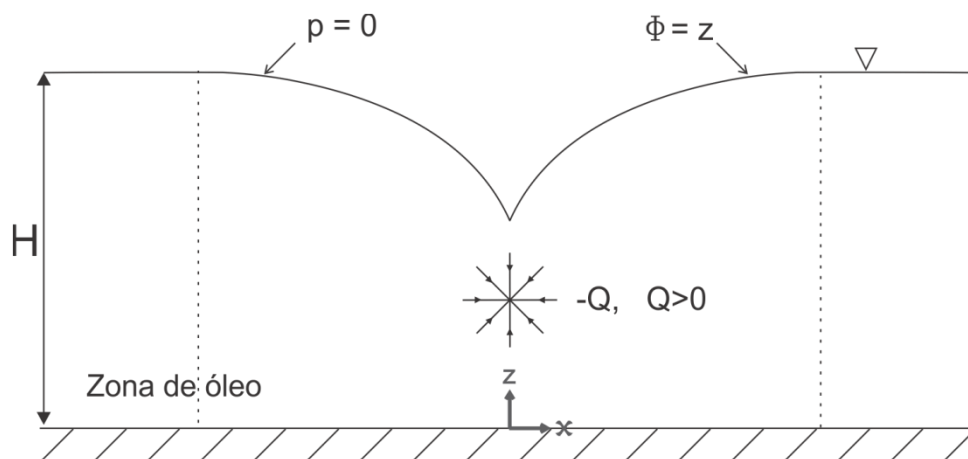


Figura 3.2 - Aspecto geral do problema de superfície livre

Nesta figura, pode-se indicar que:

O limite inferior da zona de fluido é a base, definida como uma fronteira impermeável. A impermeabilidade implica na condição de que não há escoamento na direção normal à base. Assim:

$$\text{C.C. Base:} \quad \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.15)$$

O limite superior da zona de fluido é a superfície livre, que é definida como uma superfície freática, onde $p = 0$. Logo, de acordo com a Eq.(3.8), a altura piezométrica da superfície livre é simplesmente sua altura (coordenada z).

Segundo Banerjee (1981), a superfície livre é uma linha de corrente, logo, não há fluxo normal a ela. Assim, a superfície livre tem duas condições de contorno estabelecidas:

$$\text{C.C. 1 Superfície livre:} \quad \Phi = z(x) \quad (3.16)$$

$$\text{C.C. 2 Superfície livre:} \quad \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.17)$$

porém, sua localização é desconhecida e por sua vez é o objeto de estudo. Na Eq.(3.17), $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à superfície livre.

H é a altura total do reservatório, medida da base impermeável até a superfície livre não perturbada pelo escoamento.

O sumidouro é localizado em x_0 , e tem intensidade $-Q, Q > 0$.

3.3.2 PROBLEMA DE DOIS FLUIDOS

A Fig. 3.3 mostra o aspecto geral de um problema de dois fluidos.

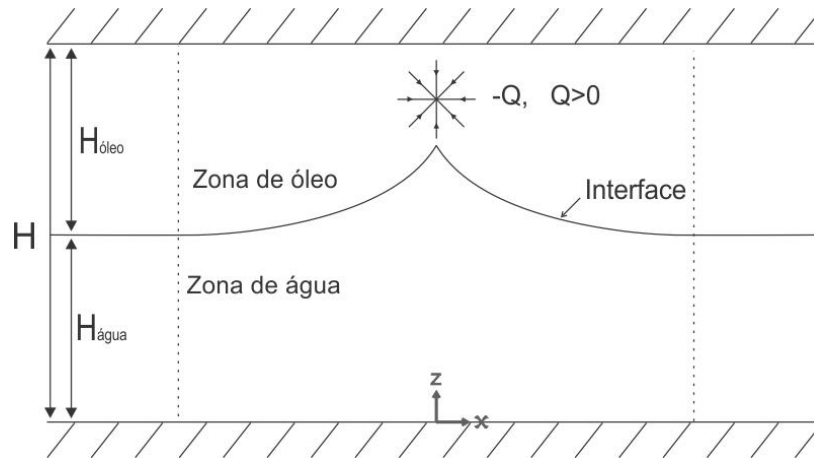


Figura 3.3 - Aspecto geral do problema de dois fluidos

Na Fig. 3.3, pode-se indicar que:

O limite inferior da zona de água é a base, definida como uma fronteira impermeável. A impermeabilidade implica na condição de que não há escoamento na direção normal à base. Assim:

$$\text{C.C. Base:} \quad \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.18)$$

O limite superior da zona de óleo é o topo, também definido como uma fronteira impermeável. Com isso, tem-se:

$$\text{C.C. Topo:} \quad \mathbf{q} \cdot (\hat{\mathbf{k}}) = 0 \quad (3.19)$$

O limite entre as zonas de água e óleo é a interface. Assim como no caso anterior, a interface entre os dois fluidos é uma linha de corrente, ou seja, não há fluxo na direção normal a ela.

Adicionalmente, a dinâmica do fenômeno leva à condição de continuidade de pressão entre os dois fluidos, ao longo da interface.

Desta forma, as condições de contorno para a interface são:

$$\text{C.C. 1 Interface:} \quad \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{C.C. 2 Interface:} \quad p_{\text{óleo}} = p_{\text{água}} \quad (3.21)$$

Durante a extração do óleo, a interface, assim como a superfície livre no caso anterior, tem localização desconhecida. Descobrir esta localização é parte do problema. Na Eq.(3.20), $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal à interface.

H é a altura total do reservatório. $H_{\text{água}}$ é a altura da zona de água, medida da base impermeável até a interface não perturbada pelo escoamento. $H_{\text{óleo}}$ é a altura da zona de óleo, medida da interface não perturbada pelo escoamento até o topo impermeável.

O sumidouro é localizado em \mathbf{x}_0 , e tem intensidade $-Q, Q > 0$. Sua coordenada z se localiza no interior da zona de óleo.

3.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A VELOCIDADE

A velocidade tratada nas equações anteriores é a velocidade de descarga do fluido, que é dada pela vazão volumétrica por unidade de área de seção transversal ao escoamento, ou seja:

$$q = \frac{Q}{A} \quad (3.22)$$

É conveniente notar, entretanto, que esta é uma velocidade média macroscópica do escoamento, denominada também velocidade de Darcy, ou superficial, e não representa a magnitude da velocidade que pode ocorrer em cada um dos poros existentes no meio analisado.

A velocidade do fluido está relacionada com a velocidade de descarga por:

$$\mathbf{q} = \Theta \mathbf{u}_f \quad (3.23)$$

onde \mathbf{u}_f é a velocidade do fluido e Θ é a porosidade do meio, dada por:

$$\Theta = \frac{\text{Volume de vazios}}{\text{Volume total}} \quad (3.24)$$

Pode-se perceber da análise das equações (3.23) e (3.24) que a velocidade do fluido \mathbf{u}_f é sempre maior que a velocidade de descarga \mathbf{q} , porque a porosidade será sempre inferior à unidade.

4 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 UMA BREVE INTRODUÇÃO

4.1.1 MODELOS MATEMÁTICOS

Os modelos matemáticos de quaisquer sistemas a serem estudados são, normalmente, construídos a partir de equações diferenciais que regem o comportamento de cada parte infinitesimal de tal sistema. Segundo Banerjee (1981), uma vez descrito o sistema na forma deste conjunto de equações diferenciais, passa-se ao trabalho de obtenção da solução das equações em um determinado domínio, ou região, que por sua vez, podem ter forma geométrica complicada, composição de distintos materiais e propriedades complexas. Para tanto, várias condições deverão ser estabelecidas nos contornos da região.

Tais complicações, que aparecem na maioria dos problemas práticos, dificultam sobremaneira a obtenção de soluções analíticas para as equações governantes e, nestes casos, os métodos numéricos se apresentam como opções factíveis para a obtenção de resultados com boa precisão. Entre os métodos numéricos de grande expressão atualmente destacam-se o método das diferenças finitas, o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno.

4.1.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

De acordo com Banerjee (1981), o método das diferenças finitas (MDF) é, em princípio, aplicável a qualquer sistema de equações diferenciais, mas sua implementação computacional no que tange à aplicação das condições de contorno é, não raras vezes, uma tarefa laboriosa. Neste método, a precisão dos resultados obtidos é fortemente dependente do refinamento da malha utilizada, logo, a quantidade de operações envolvidas é elevada.

O método dos elementos finitos (MEF) consiste na discretização de todo o corpo em elementos de tamanho finito (isto é, não-infinitesimal). Neste método, segundo Banerjee (1981), cada elemento reproduz aproximadamente o comportamento da região do corpo que ocupa. A implementação das condições de contorno é relativamente fácil, ao contrário do MDF. Seu principal ponto fraco é a necessidade de discretização do corpo todo, o que inevitavelmente leva a trabalhar com um número elevado de elementos finitos, principalmente em problemas tridimensionais em grande escala.

O método dos elementos de contorno (MEC), ainda segundo Banerjee (1981), consiste em uma alternativa em relação à maneira como as equações diferenciais governantes do problema são atacadas. O primeiro passo realizado neste método é a transformação das equações diferenciais em equações integrais equivalentes. Como resultado deste passo, as variáveis envolvidas passam a ser avaliadas apenas nos extremos (contornos) da região de integração. Este é o motivo pelo qual, no MEC, a discretização só necessita ser realizada na superfície do corpo (seu contorno). Isso faz com que o MEC trabalhe com um número menor de elementos que o MEF ou o MDF: um corpo tridimensional passa a ser tratado apenas por sua superfície envoltória ao invés de todo o volume do corpo; um domínio bidimensional passa a ser tratado apenas por seu contorno ao invés de toda a sua área; um domínio unidimensional passa a ser tratado apenas por seus dois pontos extremos ao invés de todo seu comprimento.

Além de diminuir o problema em uma dimensão, o MEC tem também a vantagem de possibilitar soluções que variem continuamente em todo o corpo, sendo que as aproximações ficam restritas ao seu contorno. O MEC, por sua discretização apenas do contorno, leva a um sistema com número muito menor de equações do que o MEF ou o MDF. O ponto negativo é que o MEC gera matrizes densamente povoadas, enquanto que o MEF gera matrizes maiores, porém esparsas.

As próximas seções apresentam a formulação do método dos elementos de contorno para problemas regidos pela equação de Laplace, que é o caso do modelo adotado neste trabalho.

4.2 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Segundo Braga (2012), a solução fundamental da equação diferencial governante é a base da formulação método dos elementos de contorno. Para o caso estudado neste trabalho, a solução fundamental corresponde à resposta do potencial em um meio infinito quando a fonte (ou sumidouro) está concentrada em um ponto. De acordo com Braga (2012) ela é a solução particular da equação de Poisson quando o termo não homogêneo (referente à fonte ou ao sumidouro) é igual ao delta de Dirac:

$$\nabla^2 \Phi^* = - \frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_d)}{K} \quad (4.1)$$

Uma solução possível para a Eq.(4.1) é:

$$\Phi^* = A \ln(r) \quad (4.2)$$

em que r é a distância entre o ponto onde a fonte é aplicada (ponto fonte) e o ponto onde a pressão é medida (ponto campo), mostrados na Fig. 4.1, e A é uma constante a ser determinada.

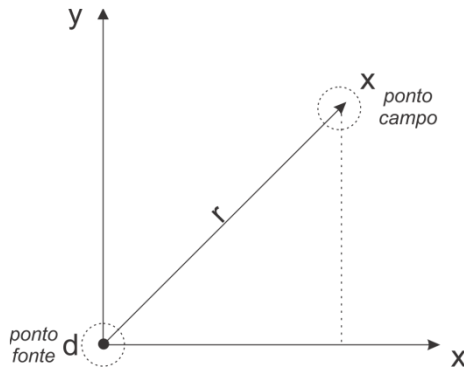


Figura 4.1 - Pontos fonte e campo

4.2.1 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO POTENCIAL

Substituindo a Eq.(4.2) na Eq.(4.1), tem-se:

Da Fig. 4.1, temos que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (4.3)$$

Uma vez que $\Phi^* = A \ln(r)$, conforme a Eq.(4.2), temos que

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = A \frac{\partial \ln(r)}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.4)$$

Pode-se calcular que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{r} \quad (4.5)$$

Desta forma,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} = A \frac{1}{r} \frac{x}{r} = A \frac{x}{r^2} \quad (4.6)$$

Derivando a Eq.(4.6) em relação a x , obtemos:

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial x^2} = A \left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{2x^2}{r^4} \right) \right] \quad (4.7)$$

Analogamente, para y , temos que

$$\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial y^2} = A \left[\frac{1}{r^2} - \left(\frac{2y^2}{r^4} \right) \right] \quad (4.8)$$

Portanto, das equações (4.7) e (4.8), tem-se que

$$\nabla^2 \Phi^* = 2A \underbrace{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{x^2+y^2}{r^4} \right)}_{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)} \quad (4.9)$$

Logo,

$$\nabla^2 \Phi^* = 2A\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (4.10)$$

Igualando as equações (4.1) e (4.10), pode-se calcular a constante A :

$$-\frac{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_d)}{K} = 2A\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \quad (4.11)$$

$$A = -\frac{1}{2K} \quad (4.12)$$

Substituindo a Eq.(4.12) na Eq.(4.2), obtém-se:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2K} \ln(r) \quad (4.13)$$

Porém, segundo Kane (1994), para se obter uma melhor formulação, considera-se um fluxo unitário através da fonte, transformando a Eq.(13) na seguinte forma:

$$\Phi^* = -\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \quad (4.14)$$

A Eq.(4.14) é a solução fundamental do potencial.

4.2.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO FLUXO

Avaliando o fluxo que atravessa o contorno, temos que:

$$q = -K\nabla\Phi \cdot \mathbf{n} \quad (4.15)$$

A Eq.(4.15) pode ser reescrita como

$$q = -K \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (4.16)$$

Logo, a solução fundamental para o fluxo é:

$$q^* = -K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \quad (4.17)$$

Utilizando o valor de Φ^* obtido na Eq.(4.14), temos:

$$q^* = -K \frac{\partial}{\partial n} \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) \quad (4.18)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(\ln r)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} n_x + \frac{\partial(\ln r)}{\partial y} n_y \right] \quad (4.19)$$

Analisando a Eq.(4.19) em x :

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} = \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{x}{r} = \frac{x}{r^2} \quad (4.21)$$

Analogamente, em y :

$$\frac{\partial(\ln r)}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{y}{r} = \frac{y}{r^2} \quad (4.22)$$

Substituindo as Eqs.(4.21) e (4.22) na Eq.(4.19), segue que

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x}{r^2} n_x + \frac{y}{r^2} n_y \right] \quad (4.23)$$

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} (x n_x + y n_y) \quad (4.24)$$

Generalizando para quando o ponto fonte não está localizado na origem do sistema de coordenadas, a Eq.(24) toma a forma:

$$q^* = \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d) n_x + (y - y_d) n_y] \quad (4.25)$$

A Eq.(4.25) é a solução fundamental do fluxo.

Quando o ponto fonte não está localizado na origem, a expressão para o raio é:

$$r = \sqrt{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2} \quad (4.26)$$

onde (x_d, y_d) são as coordenadas do ponto fonte.

4.3 A EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Para obter a equação integral de contorno, utiliza-se o método dos resíduos ponderados e o teorema de Gauss-Green. O método dos resíduos ponderados multiplica a equação diferencial governante do

problema, Eq.(3.4), por uma função peso arbitrária ω . Integra-se a expressão obtida em todo o domínio e assume-se que o resultado da integração é zero. Este procedimento é mostrado na Eq.(4.27).

$$\int_A (\nabla^2 \Phi) \omega dA = 0 \quad (4.27)$$

Desenvolvendo a Eq.(4.27), tem-se:

$$\int_A \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \omega dA = 0 \quad (4.28)$$

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = 0 \quad (4.29)$$

Neste ponto, lança-se mão do teorema de Gauss-Green - Eq.(4.30) - para realizar a transformação das integrais sobre o domínio em integrais sobre o contorno:

$$\int_S f(x, y) n_x dS = \int_A \frac{\partial f}{\partial x} dA \quad (4.30)$$

A partir daqui, será analisado a primeira integral da Eq.(4.29), que traz a derivada em x :

Fazendo $f(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega$ na Eq.(4.30), temos que

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS = \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega \right) dA \quad (4.31)$$

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS = \int_A \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \quad (4.32)$$

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS = \int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA + \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \quad (4.33)$$

Reorganizando a Eq.(4.33):

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA \quad (4.34)$$

Para transformar a última integral de domínio, do lado direito da Eq.(4.34), utiliza-se o seguinte artifício:

Aplicando o teorema de Gauss-Green fazendo $f = \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x}$, tem-se:

$$\int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS = \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dA \quad (4.35)$$

$$\int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS = \int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.36)$$

Reorganizando a Eq.(4.36):

$$\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} dA = \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS - \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.37)$$

Com isso, podemos escrever a primeira integral da Eq.(4.29), substituindo a Eq.(4.37) na Eq.(4.37), como:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial x} \omega n_x dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial x} n_x dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} dA \quad (4.38)$$

Analogamente, para a segunda integral da Eq.(4.29), pode-se escrever:

$$\int_A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \omega dA = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial y} \omega n_y dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y dS + \int_A \Phi \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} dA \quad (4.39)$$

Substituindo as equações (4.38) e (4.39) na Eq.(4.29), é obtido:

$$\int_S \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} n_y \right) \omega dS - \int_S \Phi \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} n_x + \frac{\partial \omega}{\partial y} n_y \right) dS + \int_A \Phi \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) dA = 0 \quad (4.40)$$

A Eq.(4.40) pode ser escrita na forma:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \omega dS - \int_S \Phi \frac{\partial \omega}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \omega dA = 0 \quad (4.41)$$

O próximo passo é a eliminar a integral de domínio da Eq.(4.41) de forma a obter uma equação integral de contorno. Para isso, deve ser escolhida uma função peso $\omega(x, y)$ cujo laplaciano seja igual a zero. Uma das características do método dos elementos de contorno é utilizar como função peso a solução fundamental para o potencial, ou seja, fazer $\omega = \Phi^*$. Como o laplaciano da solução fundamental é uma função delta de Dirac, então o mesmo será igual a zero para todo o domínio, exceto no ponto fonte.

Desta forma, a Eq.(4.41) fica:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \nabla^2 \Phi^* dA = 0 \quad (4.42)$$

Substituindo o laplaciano da solução fundamental pelo expresso na Eq.(4.1), tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS + \int_A \Phi \left(-\frac{\delta(x-x_d)}{K} \right) dA = 0 \quad (4.43)$$

Pelas propriedades da função delta de Dirac, tem-se:

$$\int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi^* dS - \int_S \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} dS - \frac{\Phi(x_d, y_d)}{K} = 0 \quad (4.44)$$

Multiplicando a Eq.(4.44) por $(-K)$:

$$\int_S \left(-K \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \Phi^* dS - \int_S \Phi \left(-K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}\right) dS + \Phi(x_d, y_d) = 0 \quad (4.45)$$

Isolando $\Phi(x_d, y_d)$:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi \left(-K \frac{\partial \Phi^*}{\partial n}\right) dS - \int_S \left(-K \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \Phi^* dS \quad (4.46)$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.17) na Eq.(4.46), tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.47)$$

A Eq. (4.47) é a equação integral de contorno válida para quando o ponto fonte está no interior do domínio.

Para abranger o caso em que o ponto fonte se encontra sobre o contorno, devemos lançar mão do seguinte artifício:

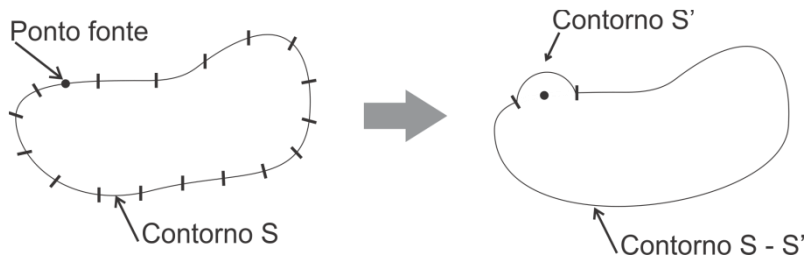


Figura 4.2 - Modificação do contorno

Da Fig. 4.2, tem-se que o contorno original é o contorno S. Faz-se uma alteração no contorno S, criando um arco de circunferência sobre o ponto fonte. A este arco chamamos contorno S'.

Da análise da Fig. 4.2, percebe-se que:

$$[\text{Contorno } S] = [\text{Contorno original}]$$

$$[\text{Contorno } S - S'] + [\text{Contorno } S'] = [\text{Contorno alterado}]$$

O contorno S' é um arco de circunferência de raio ε . Em qualquer ponto de S', o raio r , que é a distância entre ponto fonte e ponto campo, é sempre igual a ε . Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, tem-se o ponto fonte

sobre o contorno. Para a aplicação deste artifício, deve-se separar as integrais da equação integral de contorno, Eq.(4.47), em S' e $(S - S')$. Como mostrado a seguir.

Considerações prévias:

$$|\mathbf{r}| = r = [(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{r} = (x - x_d)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_d)\hat{\mathbf{j}} = r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}}}{(r_x^2 + r_y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r_x\hat{\mathbf{i}} + r_y\hat{\mathbf{j}}}{r} \quad (4.50)$$

$$\therefore n_x = \frac{r_x}{r}; n_y = \frac{r_y}{r} \quad (4.51)$$

Separando as integrais da Eq.(4.47), tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) = \int_{S'} \Phi q^* dS - \int_{S'} q \Phi^* dS + \int_{(S-S')} \Phi q^* dS - \int_{(S-S')} q \Phi^* dS \quad (4.52)$$

Analisando a primeira integral em S' da Eq.(4.52) e substituindo na mesma a expressão para q^* da Eq.(4.25), tem-se:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [(x - x_d) n_x + (y - y_d) n_y] dS \quad (4.53)$$

Com o exposto nas considerações prévias - Eqs.(4.48) a (4.51) -, a Eq. (4.53) fica:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} [r_x n_x + r_y n_y] dS \quad (4.54)$$

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{S'} \Phi \frac{1}{2\pi r^2} \left[r_x \frac{r_x}{r} + r_y \frac{r_y}{r} \right] dS \quad (4.55)$$

Como, em todo S' , $r = \varepsilon$ e $dS = r d\theta \Rightarrow dS = \varepsilon d\theta$, tem-se:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi \varepsilon^2} \left(\frac{r_x^2 + r_y^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta \quad (4.56)$$

Como $r_x^2 + r_y^2 = r^2 = \varepsilon^2$:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi \varepsilon^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\Phi}{2\pi} d\theta = \frac{\Phi}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.57)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \Phi \rightarrow \Phi(x_d, y_d)$. Com isso:

$$\int_{S'} \Phi q^* dS = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \quad (4.58)$$

Analisando, agora, a segunda integral em S' da Eq.(4.52) e substituindo na mesma a expressão para Φ^* da Eq.(4.14), tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = \int_{S'} q \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(r) \right) dS \quad (4.59)$$

Fazendo $r = \varepsilon$ e $dS = \varepsilon d\theta$, tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln(\varepsilon) \right) \varepsilon d\theta \quad (4.60)$$

Lembrando que ε é constante em todo S' , tem-se:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \varepsilon \ln(\varepsilon) \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \quad (4.61)$$

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} \varepsilon \ln(\varepsilon) (\theta_2 - \theta_1) \quad (4.62)$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = -\frac{q}{2\pi K} (\theta_2 - \theta_1) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \ln(\varepsilon)] = 0 \quad (4.63)$$

Portanto, tem-se que:

$$\int_{S'} q \Phi^* dS = 0 \quad (4.64)$$

Substituindo os resultados obtidos com as equações (4.58) e (4.64) na equação original, (4.52), segue que:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_{(S-S')} \Phi q^* dS - \int_{(S-S')} q \Phi^* dS \quad (4.65)$$

Levando em consideração que quando se faz $\varepsilon \rightarrow 0$ isso implica que $(S - S') \rightarrow S$, então:

$$\Phi(x_d, y_d) = \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} + \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.66)$$

Reorganizando, tem-se:

$$\Phi(x_d, y_d) - \Phi(x_d, y_d) \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.67)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.68 a)$$

$$\Phi(x_d, y_d) \left[\frac{2\pi - (\theta_2 - \theta_1)}{2\pi} \right] = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.68 b)$$

O numerador da expressão entre colchetes, $2\pi - (\theta_2 - \theta_1)$, corresponde ao ângulo interno do contorno, conforme mostrado na Fig. 4.3. Então:

$$\Phi(x_d, y_d) \frac{\theta_{int}}{2\pi} = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.69)$$

A Eq.(4.69) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está sobre o contorno.

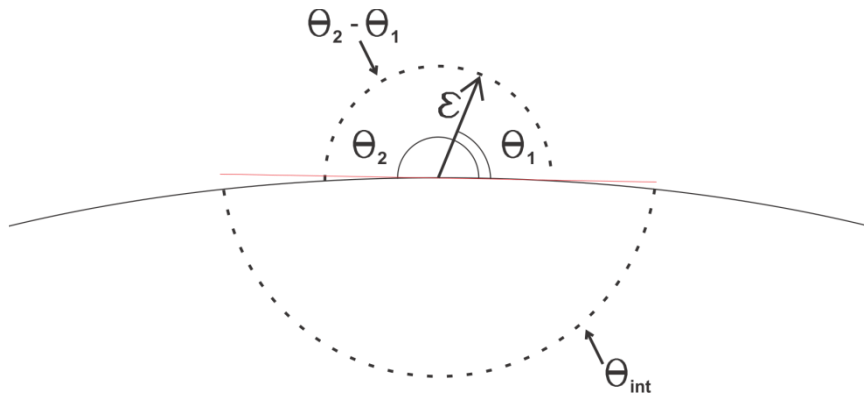


Figura 4.3 - Ângulos interno e externos

Se o ponto fonte estiver no exterior do domínio e fora do contorno, então a integral do delta de Dirac da Eq.(4.43) é igual a zero e, com isso, $\Phi(x_d, y_d) = 0$. Neste caso, então:

$$0 = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.70)$$

A Eq.(4.70) é a equação integral de contorno válida quando o ponto fonte está no exterior do domínio e fora do contorno.

Dos resultados obtidos nas equações (4.47), (4.69) e (4.70), pode-se escrever:

$$c \cdot \Phi(x_d, y_d) = \int_S \Phi q^* dS - \int_S q \Phi^* dS \quad (4.71)$$

onde:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{quando o ponto fonte está fora do domínio} \\ \frac{\theta_{int}}{2\pi} & \text{quando o ponto fonte está sobre o contorno} \\ 1 & \text{quando o ponto fonte está no interior do domínio} \end{cases}$$

Para um ponto suave do contorno, Banerjee (1981) e Kane (1994) mostram que $\frac{\theta_{int}}{2\pi} = \frac{1}{2}$.

4.4 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

A formulação do método dos elementos de contorno implica na discretização do contorno da região estudada. Desta forma, o contorno S é escrito como a soma de n pedaços nos quais o mesmo é dividido, conforme a Fig. 4.4.

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n \quad (4.72)$$

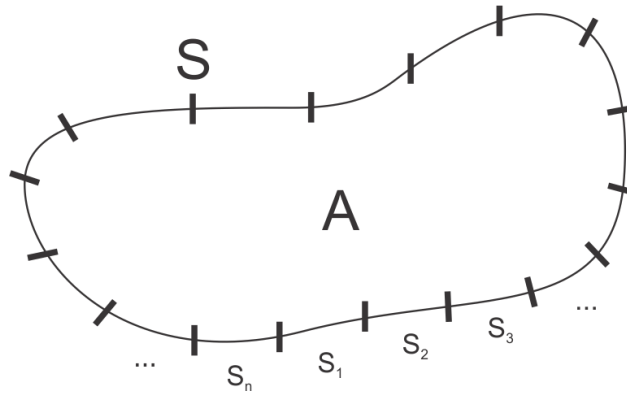


Figura 4.4 - Discretização do contorno

A discretização do contorno implica na discretização da equação integral de contorno (4.71). Desta forma, cada uma das integrais da equação dá origem a n integrais sobre os n pedaços do contorno dividido. A Eq.(4.71) discretizada é escrita como:

$$c \cdot \Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{s_j} \Phi q^* dS_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\int_{s_j} q \Phi^* dS_j \right) \quad (4.73)$$

A discretização do contorno gera n pedaços do contorno que precisam, ainda, ser representados matematicamente. Estes pedaços do contorno podem ter uma forma qualquer, fato que leva à necessidade de serem aproximados por uma forma conhecida, como, segmentos de reta, polinômios de primeira ordem, polinômios de segunda ordem, etc. Quanto mais alto for o grau do polinômio utilizado, mais fiel será a representação que esta forma conhecida fará do pedaço do contorno. Estas formas conhecidas são chamadas de *elementos de contorno*. A soma de todos os elementos de contorno será, então, uma aproximação do contorno real S . Quanto maior for a discretização, ou seja, quanto maior for o número n de pedaços em que o contorno foi dividido, melhor será a aproximação feita por meio dos elementos de contorno. Enquanto o contorno real é denominado S , o contorno aproximado é denominado Γ . Cada pedaço do contorno real S_j é aproximado por um *elemento de*

contorno Γ_j , conforme mostrado na Fig. 4.5. A Eq.(4.73) para a aproximação com os elementos de contorno fica:

$$c \cdot \Phi(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \Phi q^* d\Gamma_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} q \Phi^* d\Gamma_j \right) \quad (4.74)$$

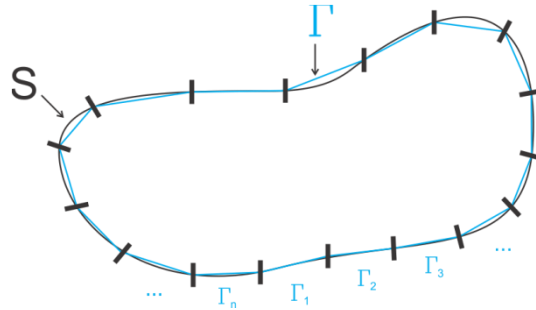


Figura 4.5 - Aproximação dos elementos reais por elementos de contorno

4.5 ELEMENTOS DE CONTORNO CONSTANTES

Os elementos de contorno constantes são aproximações da geometria dos elementos de contorno reais por meio de segmentos de reta com um nó no meio de cada elemento (Fig. 4.6). A ideia é que, ao longo de um elemento deste tipo, as condições de contorno são constantes. Além disso, como o nó está sempre no meio do elemento, a constante c da Eq.(4.74) assumirá o valor de $c = \frac{1}{2}$ quando o ponto fonte estiver localizado sobre o contorno. Aplicando as considerações a respeito dos elementos constantes, a equação integral de contorno fica:

$$\frac{1}{2} \cdot \Phi^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left(\Phi_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j \right) - \sum_{j=1}^n \left(q_j \int_{\Gamma_j} \Phi^* d\Gamma_j \right) \quad (4.75)$$

A Eq.(4.75) é a equação integral de contorno discretizada em elementos constantes, onde o índice i corresponde ao i -ésimo elemento de contorno analisado.

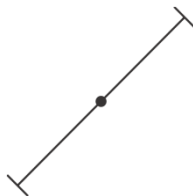


Figura 4.6 - Elemento de contorno constante

Pode-se organizar a Eq.(4.75) da seguinte forma:

$$-\frac{1}{2} \cdot \Phi^i(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left(\Phi_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(q_j \int_{\Gamma_j} \Phi^* d\Gamma_j \right) \quad (4.76)$$

A Eq.(4.76) pode ser transformada em uma forma matricial, fazendo:

$$H_{ij} = \begin{cases} \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma & \text{se } i \neq j \\ -\frac{1}{2} + \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.77)$$

e

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} \Phi^* d\Gamma \quad (4.78)$$

Com isso, a Eq.(4.76) fica:

$$\sum_{j=1}^n (H_{ij} \Phi_j) = \sum_{j=1}^n (G_{ij} q_j) \quad (4.79)$$

Finalmente, a Eq.(4.79) é a equação integral de contorno discretizada e em forma matricial.

4.6 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Para a descrição do método de solução, será apresentado um exemplo de aplicação em um problema de condução de calor unidirecional em uma placa plana retangular com dois lados isolados e dois lados com temperaturas estabelecidas, conforme a Fig. 4.7. A discretização utilizada é de um elemento por lado.

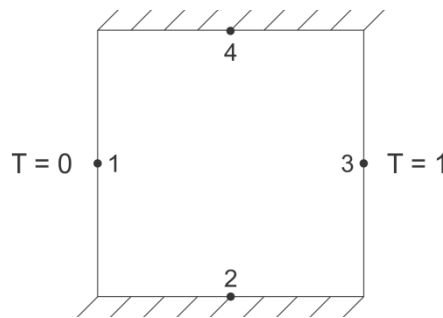


Figura 4.7 - Placa plana

Do problema, percebe-se que nos nós 1 e 3 a temperatura é conhecida e o fluxo é desconhecido. Nos nós 2 e 4 o fluxo é conhecido e a temperatura é desconhecida.

4.6.1 CÁLCULO DO POTENCIAL E DO FLUXO NO CONTORNO

O primeiro passo para a aplicação é colocar o ponto fonte no primeiro elemento, sobre o nó 1 e escrever a Eq.(4.79) para este nó:

$$H_{11}\bar{T}_1 + H_{12}T_2 + H_{13}\bar{T}_3 + H_{14}T_4 = G_{11}q_1 + G_{12}\bar{q}_2 + G_{13}q_3 + G_{14}\bar{q}_4 \quad (4.80)$$

Onde as variáveis sobrescritas com uma barra significam que são condições de contorno conhecidas.

Para o nó 2, tem-se:

$$H_{21}\bar{T}_1 + H_{22}T_2 + H_{23}\bar{T}_3 + H_{24}T_4 = G_{21}q_1 + G_{22}\bar{q}_2 + G_{23}q_3 + G_{24}\bar{q}_4 \quad (4.81)$$

Procede-se da mesma forma para os nós 3 e 4. Ao final deste procedimento, tem-se, de forma matricial:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ T_2 \\ \bar{T}_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ \bar{q}_2 \\ q_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.82)$$

ou, de forma compacta,

$$[H]\{T\} = [G]\{q\} \quad (4.83)$$

A seguir, reorganizam-se as equações de forma a separar as variáveis conhecidas das desconhecidas, resultando em:

$$\begin{bmatrix} -G_{11} & H_{12} & -G_{13} & H_{14} \\ -G_{21} & H_{22} & -G_{23} & H_{24} \\ -G_{31} & H_{32} & -G_{33} & H_{34} \\ -G_{41} & H_{42} & -G_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ T_2 \\ q_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_{11} & G_{12} & -H_{13} & G_{14} \\ -H_{21} & G_{22} & -H_{23} & G_{24} \\ -H_{31} & G_{32} & -H_{33} & G_{34} \\ -H_{41} & G_{42} & -H_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{q}_4 \end{Bmatrix} \quad (4.84)$$

É importante lembrar que todos os elementos das matrizes H e G são conhecidos, resultando da integração das equações (4.77) e (4.78). As variáveis do vetor da esquerda são desconhecidas enquanto que as do vetor da direita são conhecidas. Desta forma, pode-se escrever:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (4.85)$$

ou

$$\{x\} = [A]^{-1} \{b\} \quad (4.86)$$

Da resolução deste sistema linear, obtém-se os valores desconhecidos de T e q no contorno.

4.6.2 CÁLCULO DO POTENCIAL E DO FLUXO EM PONTOS INTERNOS

Depois que o potencial e o fluxo foram calculados no contorno, os mesmos podem, então, ser calculados em qualquer ponto no interior do domínio. Para a realização de tal tarefa, coloca-se o ponto fonte no interior do domínio, no ponto desejado e aplica-se a equação integral de contorno (Eq. 4.71). Como as integrais desta equação são avaliadas no contorno e, nele, os valores de Φ e q já são conhecidos, então a única incógnita da equação integral de contorno é o potencial no ponto interno em questão. É importante notar que, quando o ponto fonte está no interior do domínio, a constante c da Eq.(4.71) vale 1.

Para o cálculo do fluxo em um ponto interior ao domínio é necessário, primeiramente, derivar a equação integral de contorno (Eq. 4.71) em relação às coordenadas do ponto fonte (x_d, y_d) , fazendo:

$$\frac{\partial \Phi(x_d)}{\partial x_d} = \frac{\partial}{\partial x_d} \left[\int_S q^*_{(x,x_d)} \Phi(x) dS(x) \right] - \frac{\partial}{\partial x_d} \left[\int_S \Phi^*_{(x,x_d)} q(x) dS(x) \right] \quad (4.87)$$

$$\frac{\partial \Phi(x_d)}{\partial x_d} = \int_S \frac{\partial q^*_{(x,x_d)}}{\partial x_d} \Phi(x) dS(x) - \int_S \frac{\partial \Phi^*_{(x,x_d)}}{\partial x_d} q(x) dS(x) \quad (4.88)$$

A partir desta equação, pode-se calcular o fluxo em um ponto do interior do domínio, lembrando que:

$$\mathbf{q} = \left(-K \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{i}} - \left(K \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{j}} \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x_d} = \frac{[n_x(r_x^2 - r_y^2) + 2n_y r_x r_y]}{2\pi r^4} \quad (4.90)$$

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x_d} = \frac{r_x}{2\pi K r^2}; \text{ onde } r_x = x - x_d \quad (4.91)$$

As equações (4.87) a (4.91), com exceção da Eq.(4.89) têm suas análogas em relação a y_d .

4.7 ELEMENTOS DE CONTORNO LINEARES CONTÍNUOS

Os elementos de contorno lineares contínuos são aproximações da geometria dos elementos de contorno reais por meio de segmentos de reta com um nó em cada extremidade do elemento (Fig. 4.8). Ao contrário do que ocorre nos elementos de contorno constantes, as condições de contorno variam linearmente ao longo dos elementos lineares.

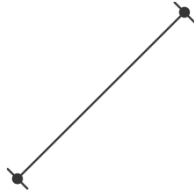


Figura 4.8 - Elemento de contorno linear contínuo

Uma diferença com relação ao tipo de elemento previamente explicado é que, como os nós estão na extremidade do elemento, nem sempre o ponto fonte estará em uma parte suave do contorno. Assim sendo, a constante c da Eq.(4.74) nem sempre irá assumir o valor de $c = \frac{1}{2}$, devendo ser calculada para cada posição do ponto fonte (nos casos em que o mesmo estiver localizado sobre o contorno).

Pelo fato de possuir dois nós em cada elemento, as condições de contorno da Eq.(4.74) devem ser explicitadas em termos do potencial e do fluxo em cada um dos nós. Assim, assume-se que:

$$\Phi_j = (N_1\Phi_1 + N_2\Phi_2)_j \quad (4.92)$$

$$q_j = (N_1q_1 + N_2q_2)_j \quad (4.93)$$

Nas Eq.(4.92) e (4.93), N_1 e N_2 são as *funções de forma* do elemento. Como se trata de elementos retilíneos, as funções de forma são equações de reta baseadas nas coordenadas locais do elemento, denominada ξ , que varia de -1 a $+1$, conforme mostrado na Fig. 4.9.

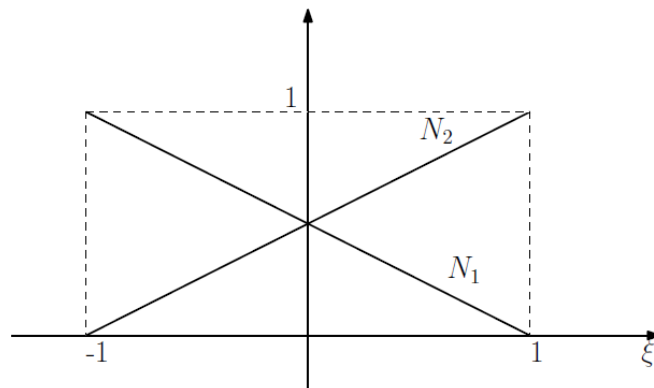


Figura 4.9 - Funções de forma. Fonte: Braga (2012)

Braga (2012) mostra que, para os elementos de contorno lineares contínuos, as funções de forma são dadas por:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.94)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.95)$$

Aplicando as considerações a respeito dos elementos lineares contínuos, a equação integral de contorno fica:

$$c \cdot \Phi^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left([h_1 \ h_2]_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left([g_1 \ g_2]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.96)$$

Na Eq.(4.96), os ternos h_1 , h_2 , g_1 e g_2 são dados por:

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma \quad (4.97)$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma \quad (4.98)$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi^* d\Gamma \quad (4.99)$$

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi^* d\Gamma \quad (4.100)$$

A Eq.(4.96) é a equação integral de contorno discretizada em elementos lineares contínuos, onde o índice i corresponde ao i -ésimo elemento de contorno analisado.

Pode-se organizar a Eq.(4.96) da seguinte forma:

$$-c \cdot \Phi^i(x_d, y_d) + \sum_{j=1}^n \left([h_1 \ h_2]_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left([g_1 \ g_2]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.101)$$

A Eq.(4.101) pode ser transformada em uma forma matricial, fazendo:

$$H_{ij} = \begin{cases} [h_1 \ h_2]_j & \text{se } i \neq j \\ -c + [h_1 \ h_2]_j & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.102)$$

e

$$G_{ij} = [g_1 \ g_2]_j \quad (4.103)$$

Com isso, a Eq.(4.101) fica:

$$\sum_{j=1}^n \left(H_{ij} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(G_{ij} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right) \quad (4.104)$$

Finalmente, a Eq.(4.104) é a equação integral de contorno discretizada e em forma matricial.

O método de solução para elementos de contorno lineares contínuos é análogo ao explicado na seção 4.6 e não será desenvolvido aqui para evitar repetição.

4.8 INTEGRAÇÃO DAS MATRIZES DE INFLUÊNCIA

A integração das matrizes de influência H e G é uma parte importante no que concerne ao desempenho da formulação implementada. Dada a relevância deste tópico, o mesmo será tratado em um capítulo a parte.

5 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS MATRIZES DE INFLUÊNCIA H E G

5.1 ANÁLISE QUALITATIVA DAS INTEGRAÇÕES

Como mostrado no capítulo 4, o método dos elementos de contorno é um método integral que tem graus de liberdade apenas no contorno da região estudada. De acordo com Kane (1994), este método tem duas características importantes, no que concerne às integrações:

- são consumidos muitos recursos computacionais com as integrações (se comparados com métodos de domínio), considerando que cada elemento de contorno é integrado N vezes, uma para cada localização do ponto fonte, sendo N o número total de nós do problema;
- a qualidade da solução obtida está intimamente relacionada à precisão do procedimento de integração utilizado.

Uma observação importante é que quando o ponto fonte está localizado sobre o elemento que está sendo integrado, os integrandos costumam apresentar singularidades, como por exemplo, com o raio tendendo a zero nas soluções fundamentais mostradas nas equações (4.14) e (4.25).

É mostrado por Kane (1994) que a integração exata das expressões é algo que pode se tornar bastante complicado quando o contorno discretizado foi aproximado por elementos de contorno quadráticos ou de mais alta ordem, porque os integrandos podem ser bastante complicados. Isto não significa que não possam ser obtidas expressões analíticas para estas integrais (principalmente com o auxílio dos softwares de manipulação simbólica atuais), mas tais expressões analíticas podem chegar a ser tão longas que se consome mais recursos computacionais na manipulação das mesmas pelos algoritmos do que se fosse realizada a integração numérica. Nestes casos, há que se pesar o benefício obtido pela solução mais precisa trazida pela integração analítica e o custo computacional adicional requerido.

A integração numérica, embora seja uma aproximação da solução exata da integral, é, normalmente, o meio mais utilizado para realizar as integrações no MEC, principalmente o método da quadratura de Gauss. Entre os motivos para esta popularidade, estão a capacidade de se tratar as singularidades das soluções fundamentais e a possibilidade de utilização de elementos curvos (de ordem 2 ou superior). A utilização de elementos curvos diminui a discretização do contorno requerida para um mesmo grau de precisão entre o contorno real e o contorno aproximado, em relação a elementos retilíneos. Intuitivamente, espera-se um ganho de performance ao utilizar uma malha com um número menor de nós para se conseguir uma solução de igual qualidade. Análises de performance realizadas por Braga

(2012), porém, mostram que formulações com elementos constantes e elementos lineares convergem quase tão rapidamente para a solução exata quanto elementos quadráticos. Além disso, Kane (2012) afirma que é vantajoso se utilizar elementos retilíneos (incluem-se os constantes) combinados com integração analítica ao invés de utilizar elementos curvos combinados com integração numérica.

Embora este cenário seja muitas vezes favorável à adoção da integração numérica com elementos de contorno de alta ordem, é mostrado por Banerjee (1981) e Kane (1994) que, quando se utilizam elementos de contorno retilíneos (lineares contínuos, lineares descontínuos e elementos constantes), a integração analítica é uma prática formidável devido às expressões obtidas serem factivelmente aplicáveis nos algoritmos; a dificuldade de se obter e aplicar as expressões analíticas não são tão dramáticas quanto no caso dos elementos curvos.

5.2 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS MATRIZES

5.2.1 SISTEMA DE COORDENADAS LOCAL

A equação integral de contorno discretizada considerando elementos lineares contínuos é dada pela Eq.(4.96):

$$c \cdot \Phi^i(x_d, y_d) = \sum_{j=1}^n \left([h_1 \ h_2]_j \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix}_j \right) - \sum_{j=1}^n \left([g_1 \ g_2]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \right)$$

Conforme mostrado por Braga (2012), a integração analítica dos termos g_1 e g_2 da matriz G , e dos termos h_1 e h_2 da matriz H pode ser feita considerando um sistema de coordenadas local $x'y'$ com origem no ponto fonte e com o eixo y' paralelo ao elemento j . Na Fig. 5.1 se apresenta o sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas.

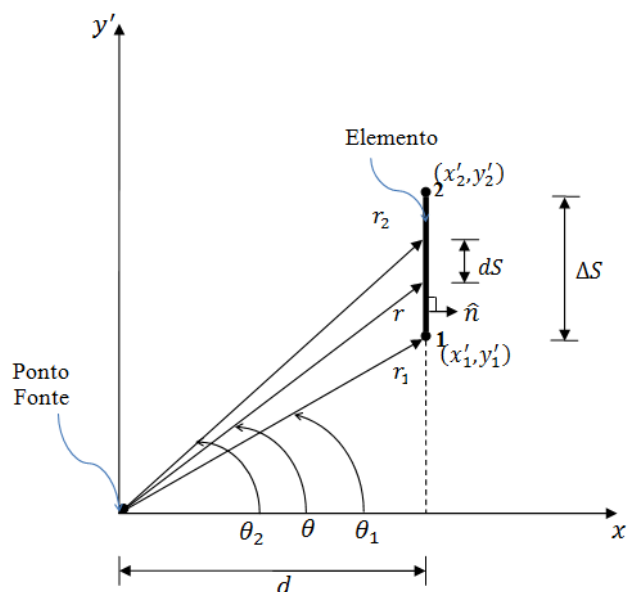


Figura 5.1 - Sistema de coordenadas local usado para o cálculo das integrais analíticas

Da Fig. 5.1, podem-se deduzir as seguintes relações:

$$x' = r \cos \theta \quad (5.1)$$

$$y' = r \sin \theta \quad (5.2)$$

$$y'_1 = r_1 \sin \theta_1 \quad (5.3)$$

$$y'_2 = r_2 \sin \theta_2 \quad (5.4)$$

O termo d é a projeção do vetor \vec{r} na direção do vetor normal unitário \hat{n} .

$$d = \vec{r} \cdot \hat{n} = r \cos \theta \quad (5.5)$$

A Eq.(5.5) pode ser escrita como:

$$r = d \sec \theta \quad (5.6)$$

O diferencial dS pode ser escrito em termos da variável θ como:

$$dS = dy' = d \sec^2 \theta d\theta \quad (5.7)$$

L é o comprimento do elemento j , e é dado por:

$$L = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} = y'_2 - y'_1 \quad (5.8)$$

As funções de forma N_1 e N_2 são definidas como:

$$N_1 = \frac{y'_2 - y'}{y'_2 - y'_1} = \frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{L} \quad (5.9)$$

$$N_2 = \frac{y' - y'_1}{y'_2 - y'_1} = \frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{L} \quad (5.10)$$

5.2.2 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA INTEGRAL PARA g_1

Substituindo as Eq.(4.14) e (5.9) na Eq.(4.99), obtém-se a expressão integral para g_1 :

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 \Phi^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left(\frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{L} \right) \left(-\frac{1}{2\pi K} \ln r \right) dS \quad (5.11)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.5), (5.6) e (5.7) na Eq.(5.11), obtém-se a seguinte expressão:

$$g_1 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \sin \theta_2 \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \sec \theta \sin \theta \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5.12)$$

Reorganizando a Eq.(5.12), tem-se:

$$g_1 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[d r_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta - d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5.13)$$

Para encontrar a expressão algébrica de g_1 , resolve-se isoladamente as integrais da Eq.(5.13), nomeadas (i) e (ii) conforme sua ordem de aparecimento na referida equação.

Primeira integral de g_1

A primeira integral de g_1 é dada por:

$$(i) \quad dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = dr_2 \sin \theta_2 [\tan \theta (\ln|d \sec \theta| - 1) + \theta] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.14)$$

Reorganizando o lado direito da Eq.(5.14), tem-se:

$$(i) \quad dr_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = r_2 \sin \theta_2 [d \tan \theta (\ln|d \sec \theta| - 1) + \theta d] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.15)$$

Substituindo na Eq.(5.15) as seguintes relações:

$$ds = |d| \quad (5.16)$$

$$d \tan \theta = r \sin \theta \quad (5.17)$$

tem-se a seguinte expressão:

$$(i) \quad d r_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = r_2 \sin \theta_2 [r \sin \theta \ln|d \sec \theta| - r \sin \theta + \theta d] \Big|_{\theta_1, r_1}^{\theta_2, r_2} \quad (5.18)$$

Aplicando-se os limites de integração na Eq.(5.18), obtém-se:

$$(i) \quad d r_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = r_2 \sin \theta_2 [r_2 \sin \theta_2 \ln|d \sec \theta_2| - r_2 \sin \theta_2 + \theta_2 d - r_1 \sin \theta_1 \ln|d \sec \theta_1| + r_1 \sin \theta_1 - \theta_1 d] \quad (5.19)$$

Mostram-se na Fig. 4.11 as relações apropriadas para expressar de uma maneira mais compacta o resultado da integral (i).

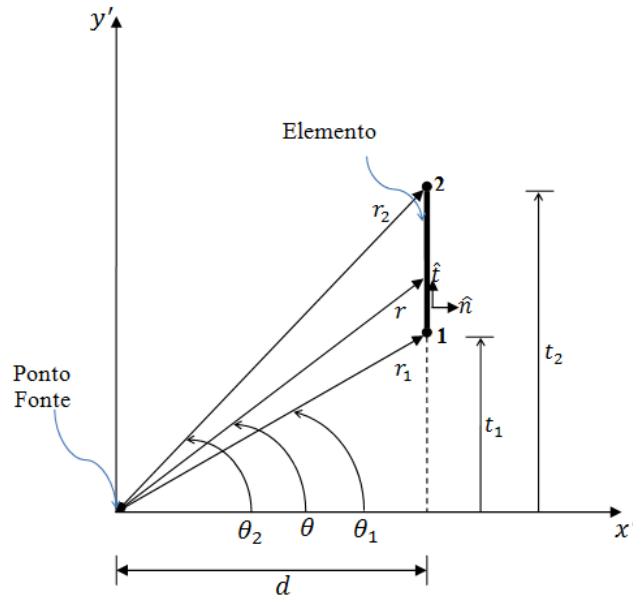


Figura 5.2 - Projeções de r_1 e r_2 na direção tangencial

Da Fig. 5.2, podem-se deduzir as seguintes relações a seguir.

t_1 é a projeção do vetor \vec{r}_1 na direção tangencial:

$$t_1 = \vec{r}_1 \cdot \hat{t} = r_1 \cos(90 - \theta_1) = r_1 \sin \theta_1 \quad (5.20)$$

d é a projeção do vetor \vec{r}_1 na direção normal:

$$d = \vec{r}_1 \cdot \hat{n} = r_1 \cos \theta_1 \quad (5.21)$$

A Eq.(5.21) pode ser escrita como:

$$r_1 = d \sec \theta_1 \quad (5.22)$$

t_2 é a projeção do vetor \vec{r}_2 na direção tangencial:

$$t_2 = \vec{r}_2 \cdot \hat{t} = r_2 \cos(90 - \theta_2) = r_2 \sin \theta_2 \quad (5.23)$$

d é a projeção do vetor \vec{r}_2 na direção normal:

$$d = \vec{r}_2 \cdot \hat{n} = r_2 \cos \theta_2 \quad (5.24)$$

A Eq.(5.24) pode ser escrita como:

$$r_2 = d \sec \theta_2 \quad (5.25)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.20) a (5.25) na Eq.(5.19), tem-se:

$$(i) \quad d r_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = t_2 [t_2 \ln|r_2| - t_2 + \theta_2 d - t_1 \ln|r_1| + t_1 - \theta_1 d] \quad (5.26)$$

É útil definir as seguintes igualdades:

$$t_2 - t_1 = L \quad (5.27)$$

$$ds = |d| \quad (5.28)$$

$$d\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{d \cdot L}{d^2 + t_1 t_2} \right) \quad (5.29)$$

Substituindo as igualdades dadas pelas Eq.(5.27), (5.28) e (5.29) na Eq.(5.26), obtém-se a expressão para a primeira integral da Eq.(5.13):

$$(i) \quad d r_2 \sin \theta_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = t_2 [d\theta * ds - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|] \quad (5.30)$$

Segunda integral de g_1

A segunda integral de g_1 é dada por:

$$(ii) \quad d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = d^2 \left[\frac{(-1 + 2 \ln|d \sec \theta|) \sec^2 \theta}{4} \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.31)$$

Expandindo o lado direito da igualdade da Eq.(5.31), tem-se:

$$(ii) \quad d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} [-d^2 \sec^2 \theta + 2d^2 \sec^2 \theta \ln|d \sec \theta|] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (5.32)$$

Elevando-se a Eq.(5.25) ao quadrado, obtém-se:

$$r^2 = d^2 \sec^2 \theta \quad (5.33)$$

Substituindo a Eq.(5.33) na Eq.(5.32), tem-se:

$$(ii) \quad d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} [-r^2 + 2r^2 \ln|r|] \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (5.34)$$

Aplicando-se os limites de integração da Eq.(5.34), obtém-se o resultado da segunda integral da Eq.(5.13):

$$(ii) \quad d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} [-r_2^2 + 2r_2^2 \ln|r_2| + r_1^2 - 2r_1^2 \ln|r_1|] \quad (5.35)$$

Substituindo os resultados das integrais (i) e (ii), dados pelas Eq.(5.30) e (5.35), na Eq.(5.13), obtém-se:

$$g_1 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[t_2 \{ d\theta * ds - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2| \} - \frac{1}{4} \{ 2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| - r_2^2 + r_1^2 \} \right] \quad (5.36)$$

Reorganizando os termos da Eq.(5.36), obtém-se o seguinte resultado para g_1 :

$$g_1 = \left(\frac{1}{8\pi KL} \right) [4t_2 \{ -d\theta * ds + L + t_1 \ln|r_1| - t_2 \ln|r_2| \} + 2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| + r_1^2 - r_2^2] \quad (5.37)$$

5.2.3 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA INTEGRAL PARA g_2

Substituindo as Eq.(4.14) e (5.10) na Eq.(4.100), obtém-se a expressão integral para g_2 :

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 \Phi^* d\Gamma = \int_{\Delta S} \left(\frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{L} \right) \left(-\frac{1}{2\pi k} \ln r \right) dS \quad (5.38)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.5), (5.6) e (5.7) na Eq.(5.38), obtém-se:

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin \theta_1 \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5.39)$$

Substituindo a relação dada pela Eq.(5.17) na Eq.(5.39), obtém-se a seguinte expressão:

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan \theta \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin \theta_1 \ln(d \sec \theta) d \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5.40)$$

Extraindo os termos constantes dos integrandos, tem-se:

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[d^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tan \theta \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta - d r_1 \sin \theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \ln(d \sec \theta) \sec^2 \theta d\theta \right] \quad (5.41)$$

Substituindo os resultados das integrais (i) e (ii) (calculadas para g_1), dados pelas Eq.(5.30) e (5.35), na Eq.(5.41), obtém-se:

$$g_2 = \left(-\frac{1}{2\pi KL} \right) \left[\frac{1}{4} \{ 2r_2^2 \ln|r_2| - 2r_1^2 \ln|r_1| - r_2^2 + r_1^2 \} - t_1 \{ d\theta * ds - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2| \} \right] \quad (5.42)$$

Reorganizando os termos da Eq.(5.42), obtém-se o seguinte resultado para g_2 :

$$g_2 = \left(\frac{1}{8\pi\kappa L}\right) [4t_1\{d\theta * ds - L - t_1 \ln|r_1| + t_2 \ln|r_2|\} + 2r_1^2 \ln|r_1| - 2r_2^2 \ln|r_2| + r_2^2 - r_1^2] \quad (5.43)$$

5.2.4 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA INTEGRAL PARA h_1

Substituindo a Eq.(4.25) na Eq.(4.97), obtém-se a expressão integral para h_1 :

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} N_1 q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} N_1 \left[\frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right] d\Gamma \quad (5.44)$$

Substituindo a Eq.(5.9) na Eq.(5.44), tem-se:

$$h_1 = \int_{\Delta S} \left[\frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{L} \right] \left[\frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right] dS \quad (5.45)$$

O produto escalar entre o vetor \vec{r} e o vetor normal unitário \hat{n} é dado por:

$$\vec{r} \cdot \hat{n} = r_x n_x + r_y n_y = r \cos \theta = d \quad (5.46)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.6), (5.7) e (5.46), na Eq. (5.45), obtém-se a seguinte expressão:

$$h_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{r_2 \sin \theta_2 - r \sin \theta}{L} \right] \left[\frac{d^2 \sec^2 \theta}{2\pi d^2 \sec^2 \theta} \right] d\theta \quad (5.47)$$

Reorganizando a Eq.(5.47), tem-se:

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r_2 \sin \theta_2 d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta d\theta \right] \quad (5.48)$$

Substituindo a relação dada pela Eq.(5.17) na Eq.(5.48), tem-se que:

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[r_2 \sin \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) - \int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan \theta d\theta \right] \quad (5.49)$$

Resolvendo a integral da Eq.(5.49) chega-se a:

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[r_2 \sin \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) + d \ln|\cos \theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \right] \quad (5.50)$$

Aplicando os limites de integração da Eq.(5.50), tem-se:

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) [r_2 \sin \theta_2 (\theta_2 - \theta_1) + d(\ln|\cos \theta_2| - \ln|\cos \theta_1|)] \quad (5.51)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.21), (5.22) e (5.24) na Eq.(5.51), obtém-se:

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[t_2 * d\theta + d \left(\ln \left| \frac{d}{r_2} \right| - \ln \left| \frac{d}{r_1} \right| \right) \right] \quad (5.52)$$

Logo,

$$h_1 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[t_2 * d\theta + d \ln \left| \frac{r_1}{r_2} \right| \right] \quad (5.53)$$

5.2.5 DESENVOLVIMENTO ANALÍTICO DA INTEGRAL PARA h_2

Substituindo a Eq.(4.25) na Eq.(4.98), obtém-se a expressão integral para h_2 :

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} N_2 q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_j} N_2 \left[\frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right] d\Gamma \quad (5.54)$$

Substituindo a Eq.(5.10) na Eq.(5.54), tem-se:

$$h_2 = \int_{\Delta S} \left[\frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{L} \right] \left[\frac{r_x n_x + r_y n_y}{2\pi r^2} \right] dS \quad (5.55)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.6), (5.7) e (5.46), na Eq. (5.55), obtém-se a seguinte expressão:

$$h_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{r \sin \theta - r_1 \sin \theta_1}{L} \right] \left[\frac{d^2 \sec^2 \theta}{2\pi d^2 \sec^2 \theta} \right] d\theta \quad (5.56)$$

Reorganizando a Eq.(5.56), tem-se:

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} r_1 \sin \theta_1 d\theta \right] \quad (5.57)$$

Substituindo a relação dada pela Eq.(5.17) na Eq.(5.57) e resolvendo sua segunda integral, obtém-se:

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} d \tan \theta d\theta - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (5.58)$$

Resolvendo a integral da Eq.(5.58), tem-se:

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[-d \ln |\cos \theta| \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (5.59)$$

Aplicando os limites de integração da Eq.(5.59), chega-se a:

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[-d (\ln |\cos \theta_2| - \ln |\cos \theta_1|) - r_1 \sin \theta_1 (\theta_2 - \theta_1) \right] \quad (5.60)$$

Substituindo as relações dadas pelas Eq.(5.20), (5.21) e (5.24) na Eq.(5.60), tem-se que:

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[d \left(\ln \left| \frac{d}{r_1} \right| - \ln \left| \frac{d}{r_2} \right| \right) - t_1 * d\theta \right] \quad (5.61)$$

Reorganizando os termos da Eq.(5.61), chega-se ao resultado analítico de h_2 :

$$h_2 = \left(\frac{1}{2\pi L}\right) \left[d \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right| - t_1 * d\theta \right] \quad (5.62)$$

Finalmente, as Eq.(5.37), (5.43), (5.53) e (5.62) reúnem as expressões para a resolução analítica das integrais das matrizes de influência H e G .

6 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA SUB-REGIÕES

6.1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta a formulação do método dos elementos de contorno para sub-regiões, que é necessária para a solução do problema do escoamento de dois fluidos, como ocorre no fenômeno do cone de água. São apresentados, também, os resultados obtidos da implementação desta formulação bem como a comparação com o resultado numérico esperado.

A formulação de sub-regiões é aplicável sempre que existam, dentro do domínio analisado, sub-regiões com propriedades físicas diferentes, como por exemplo, no problema de condução de calor em um corpo composto de dois materiais diferentes, com condutividades térmicas diferentes, ou no problema de escoamento potencial de dois fluidos imiscíveis, com densidades e viscosidades diferentes, de forma que a região de cada fluido tenha condutividade hidráulica diferente.

A Fig. 6.1 mostra um domínio composto por duas sub-regiões, R_1 e R_2 , com uma interface entre elas.

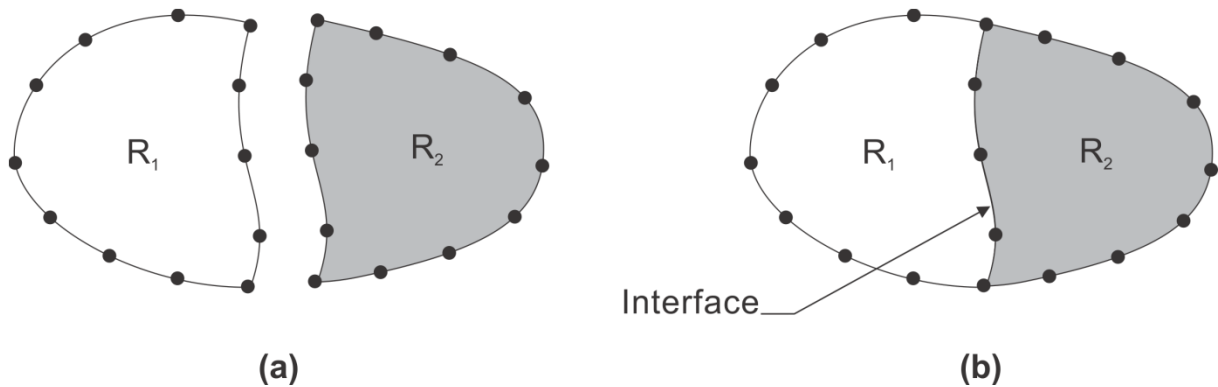


Figura 6.1 - Domínio composto por duas sub-regiões

Da Fig. 6.1 b, pode-se perceber que em cada ponto da interface, o potencial é único para as duas sub-regiões. O fluxo normal à interface, por sua vez, tem mesma magnitude para as duas regiões, porém, sentidos opostos. Isso leva às seguintes condições de acoplamento das regiões, na interface:

$$\Phi_{i,R_1} = \Phi_{i,R_2} \quad (6.1)$$

$$q_{i,R_1} = -q_{i,R_2} \quad (6.2)$$

Nas equações (6.1) e (6.2) o sub-índice i corresponde a um nó da interface, compartilhado pelas duas sub-regiões.

6.1.1 INTERFACE ENTRE DOIS FLUIDOS IMISCÍVEIS

Para o problema de escoamento potencial de dois fluidos, um dos princípios que permite a aplicação desta formulação é, segundo Bear (1972), a aproximação de interface abrupta, que considera que quando dois fluidos imiscíveis estão em contato, existe uma interface entre eles e, de cada lado da interface, só existe um fluido e seu escoamento é governado pelo gradiente de sua própria altura piezométrica. Quando esta interface se move, os fluidos também se movem de forma que não existem vazios entre a interface e as massas de fluido. Este princípio leva, segundo Liggett e Liu (1983), ao tratamento da interface como uma superfície livre, sendo sua localização uma parte do problema.

6.1.2 MÉTODO DE VALIDAÇÃO

É importante notar que, caso as duas sub-regiões tenham as mesmas propriedades físicas, os resultados obtidos com a formulação de sub-regiões devem ser os mesmos que os obtidos com a formulação de um domínio único e homogêneo.

Esta característica permite analisar a precisão dos resultados obtidos com esta formulação, aplicando o algoritmo a um problema onde todas as sub-regiões têm as mesmas propriedades físicas e comparando os resultados com os obtidos da aplicação da formulação de domínio único e homogêneo ao mesmo problema.

6.2 EQUACIONAMENTO

A seguir é apresentado um exemplo de aplicação da formulação do método dos elementos de contorno para um problema potencial em duas sub-regiões. Foi escolhido duas sub-regiões triangulares, com contorno aproximado por elementos constantes, de forma a minimizar o número de componentes das matrizes H e G para simplificar a demonstração.

A Fig. 6.2 ilustra a geometria do problema e mostra as condições de contorno envolvidas.

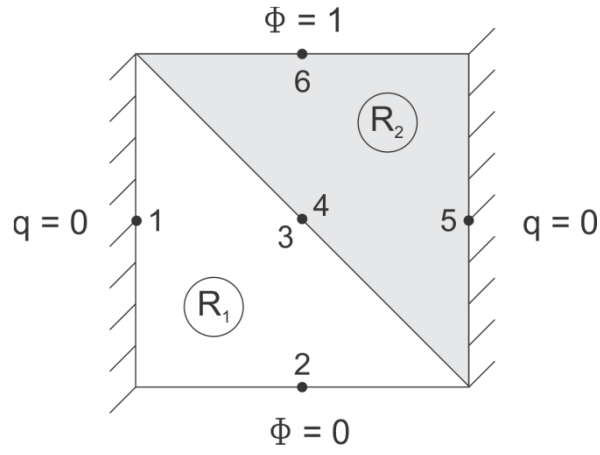


Figura 6.2 - Problema de duas sub-regiões

A seguir, apresenta-se o desenvolvimento a partir da equação integral de contorno (Eq.4.79) para as sub-regiões.

Para a sub-região 1, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \Phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} \quad (6.3)$$

Para a sub-região 2, tem-se

$$\begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \bar{\Phi}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_4 \\ \bar{q}_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

Escrevendo ambas as matrizes em uma só equação, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & 0 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & 0 & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} & H_{46} \\ 0 & 0 & 0 & H_{54} & H_{55} & H_{56} \\ 0 & 0 & 0 & H_{64} & H_{65} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \bar{\Phi}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & 0 & 0 & 0 \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{44} & G_{45} & G_{46} \\ 0 & 0 & 0 & G_{54} & G_{55} & G_{56} \\ 0 & 0 & 0 & G_{64} & G_{65} & G_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \bar{q}_5 \\ q_6 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Na interface entre as sub-regiões, tem-se as condições de acoplamento entre as mesmas:

$$\Phi_3 = \Phi_4 \quad (6.6)$$

$$q_3 = -q_4 \quad (6.7)$$

Reorganizando o sistema matricial da Eq.(6.5), separando as variáveis conhecidas das desconhecidas e incluindo as equações (6.6) e (6.7), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} & 0 & 0 & 0 & -G_{12} & -G_{13} & 0 & 0 \\ H_{21} & 0 & H_{23} & 0 & 0 & 0 & -G_{22} & -G_{23} & 0 & 0 \\ H_{31} & 0 & H_{33} & 0 & 0 & 0 & -G_{32} & -G_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} & 0 & 0 & 0 & -G_{44} & -G_{46} \\ 0 & 0 & 0 & H_{54} & H_{55} & 0 & 0 & 0 & -G_{54} & -G_{56} \\ 0 & 0 & 0 & H_{64} & H_{65} & 0 & 0 & 0 & -G_{64} & -G_{66} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ 0 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{12} & 0 \\ G_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{22} & 0 \\ G_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -H_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{45} & 0 & 0 & -H_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & 0 & 0 & -H_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{65} & 0 & 0 & -H_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{q}_5 \\ 0 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_6 \end{Bmatrix} \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Removendo as colunas compostas apenas por zeros, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} H_{11} & H_{13} & 0 & 0 & -G_{12} & -G_{13} & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{23} & 0 & 0 & -G_{22} & -G_{23} & 0 & 0 \\ H_{31} & H_{33} & 0 & 0 & -G_{32} & -G_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{44} & H_{45} & 0 & 0 & -G_{44} & -G_{46} \\ 0 & 0 & H_{54} & H_{55} & 0 & 0 & -G_{54} & -G_{56} \\ 0 & 0 & H_{64} & H_{65} & 0 & 0 & -G_{64} & -G_{66} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_6 \end{Bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} G_{11} & 0 & -H_{12} & 0 \\ G_{21} & 0 & -H_{22} & 0 \\ G_{31} & 0 & -H_{32} & 0 \\ 0 & G_{45} & 0 & -H_{46} \\ 0 & G_{55} & 0 & -H_{56} \\ 0 & G_{65} & 0 & -H_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_5 \\ \bar{\Phi}_2 \\ \bar{\Phi}_6 \end{Bmatrix} \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

A Eq.(6.9) pode ser escrita na forma compacta como:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (6.10)$$

e pode ser resolvida fazendo:

$$\{x\} = [A]^{-1}\{b\} \quad (6.11)$$

Com isto, são obtidos todos os valores de potencial e fluxo no contorno. Para a obtenção dos valores de potencial e fluxo em pontos internos, procede-se da mesma maneira que a apresentada no capítulo 4, tratando cada sub-região como um domínio completamente independente dos outros (Banerjee, 1981).

6.3 VALIDAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA SUB-REGIÕES

Uma implementação da formulação de sub-regiões foi realizada, utilizando elementos de contorno quadráticos descontínuos. Foi analisado um problema potencial em duas sub-regiões de condutividade isotrópica, com o intuito de validar o algoritmo implementado. Para fins de comparação dos resultados com os obtidos pela formulação de domínio único e homogêneo, as condutividades das duas sub-regiões foram consideradas iguais.

A Fig. 6.3 mostra a geometria do problema analisado, bem como as condições de contorno envolvidas.

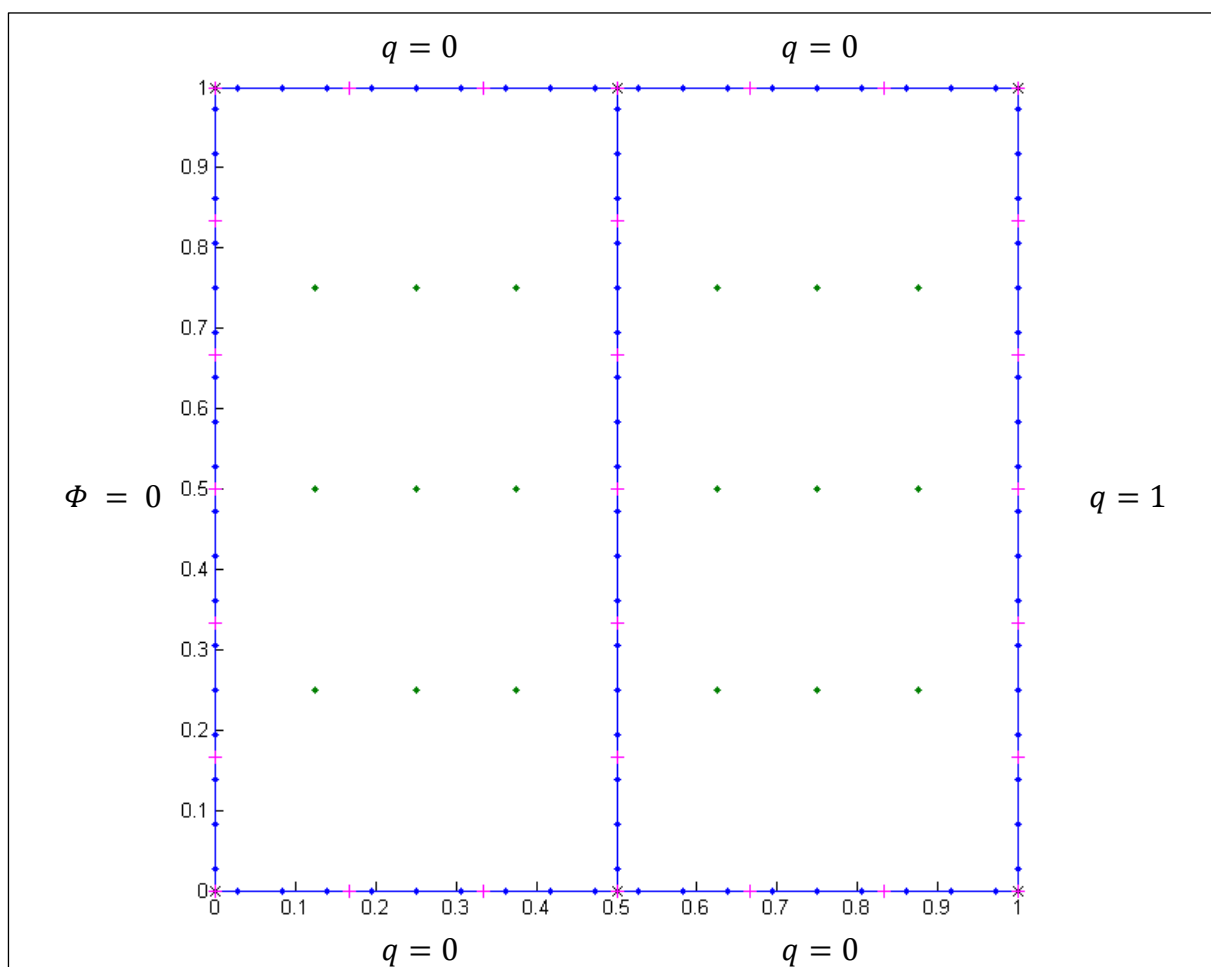


Figura 6.3 - Geometria e condições de contorno do problema analisado

Primeiramente, foi feita a simulação utilizando a formulação de domínio único e homogêneo. Os resultados para o potencial são mostrados na Fig. 6.4. Posteriormente, foi implementada a formulação de sub-regiões e aplicada ao mesmo problema. Os resultados obtidos para o potencial são mostrados na Fig. 6.5.

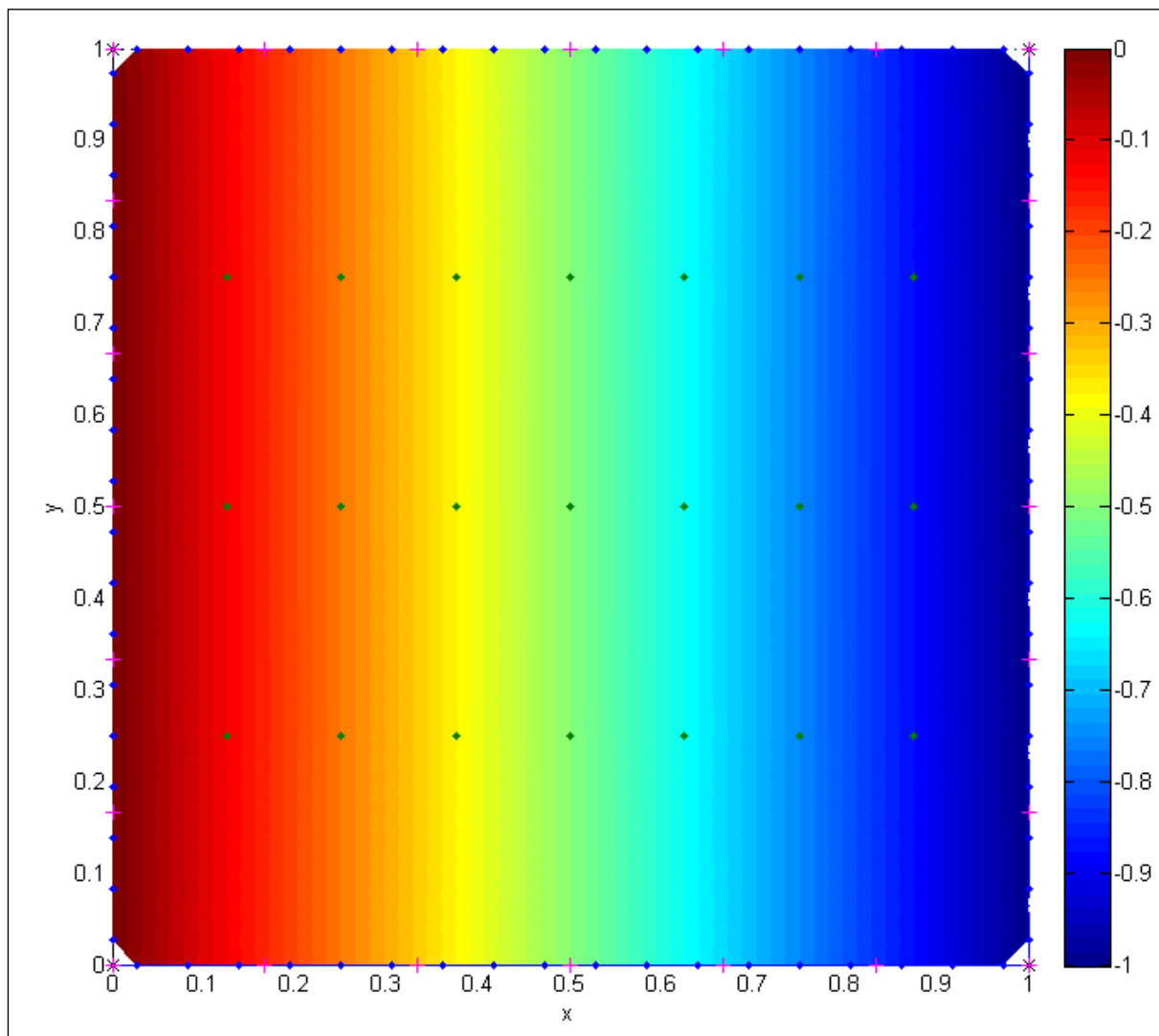


Figura 6.4 - Resultados obtidos com a formulação de domínio único e homogêneo

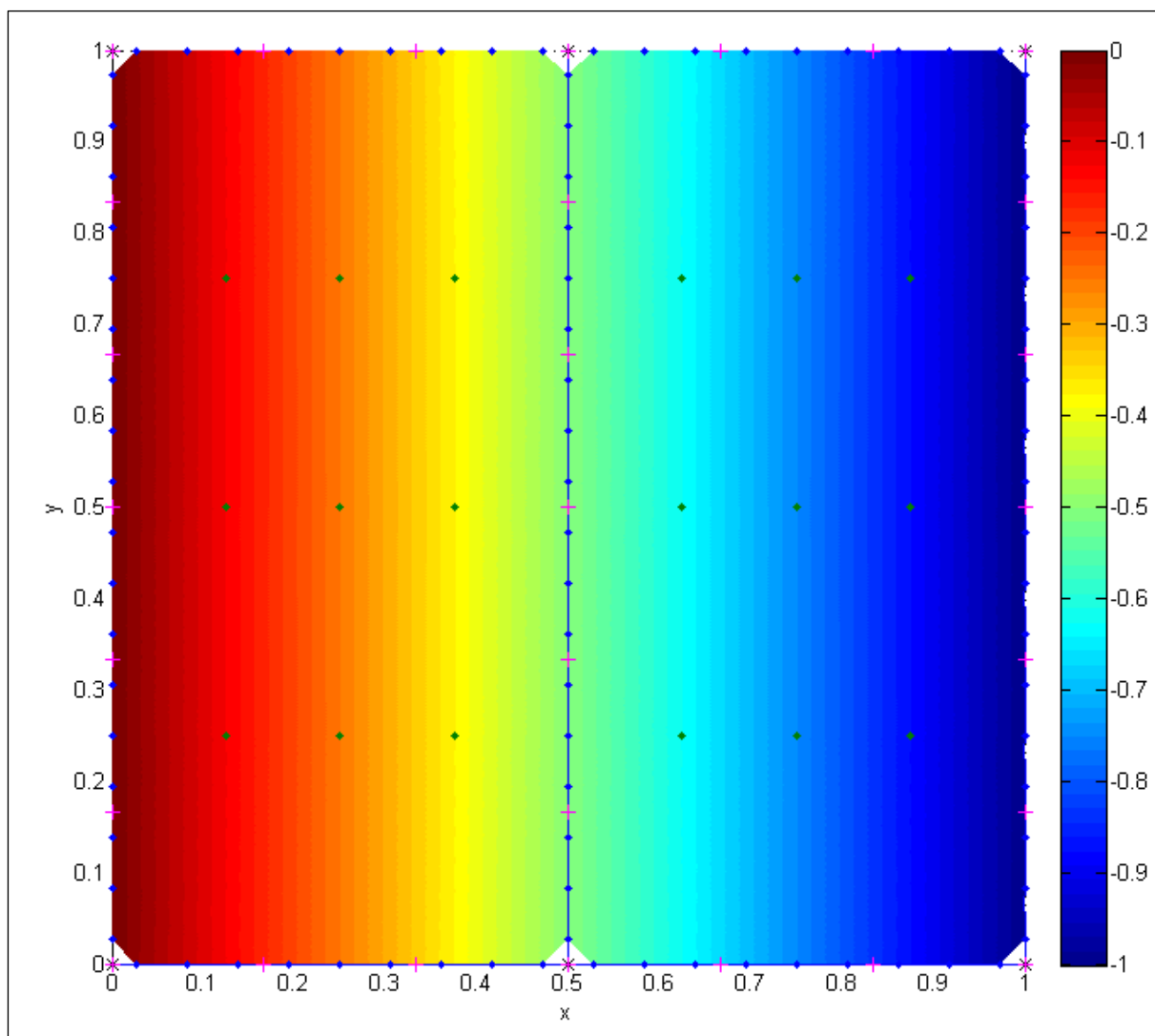


Figura 6.5 - Resultados obtidos com a formulação de sub-regiões

Os valores do potencial nos pontos internos são mostrados na Fig. 6.6. Nesta figura, os resultados são apresentados em localização semelhante à distribuição dos pontos internos na geometria do problema.. Para cada ponto é mostrado: o valor do potencial obtido com a formulação de sub-regiões; o valor do potencial obtido com a formulação de domínio único e homogêneo; o valor do potencial calculado analiticamente; o erro percentual da formulação de sub-regiões em relação ao valor de referência numérico; e o erro percentual da formulação de sub-regiões em relação ao valor de referência analítico.

Da análise das Fig. 6.4, 6.5 e 6.6 pode-se notar que os resultados obtidos com a formulação de sub-regiões são praticamente os mesmos dos valores de referência. O maior erro percentual obtido para o potencial nos pontos internos foi de 0,04 % em relação ao valor numérico de referência e de 0,10 % em relação ao valor analítico de referência.

y = 0,75	1	-0,125124 -0,125122 -0,125000 0,001371 0,099118	2	-0,250142 -0,250138 -0,250000 0,001683 0,056734	3	-0,375160 -0,375152 -0,375000 0,002096 0,042606	4	-0,500284 -0,500165 -0,500000 0,023629 0,056736	5	-0,625408 -0,625179 -0,625000 0,036569 0,065236	6	-0,750426 -0,750193 -0,750000 0,030972 0,056772	7	-0,875445 -0,875210 -0,875000 0,026826 0,050817
	8	-0,125122 -0,125120 -0,125000 0,002198 0,097938	9	-0,250142 -0,250136 -0,250000 0,002375 0,056708	10	-0,375161 -0,375151 -0,375000 0,002731 0,042953	11	-0,500283 -0,500165 -0,500000 0,023594 0,056668	12	-0,625405 -0,625180 -0,625000 0,036112 0,064879	13	-0,750424 -0,750194 -0,750000 0,030629 0,056545	14	-0,875441 -0,875209 -0,875000 0,026530 0,050366
	15	-0,125124 -0,125122 -0,125000 0,001371 0,099118	16	-0,250142 -0,250138 -0,250000 0,001683 0,056734	17	-0,375160 -0,375152 -0,375000 0,002096 0,042606	18	-0,500284 -0,500165 -0,500000 0,023629 0,056736	19	-0,625408 -0,625179 -0,625000 0,036569 0,065236	20	-0,750426 -0,750193 -0,750000 0,030972 0,056772	21	-0,875445 -0,875210 -0,875000 0,026826 0,050817
Coordenada x:		0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875						
Nro. do ponto		Resultado obtido com a formulação de sub-regiões Resultado obtido com a formulação de domínio único Resultado analítico Erro percentual relativo em relação ao resultado numérico Erro percentual relativo em relação ao resultado analítico												

Figura 6.6 - Resultados obtidos com a formulação de sub-regiões e erros percentuais relativos

7 CÓDIGO PARA SIMULAÇÃO DO FENÔMENO DO CONE DE ÁGUA

No presente trabalho, dois fluidos com diferentes massas específicas e viscosidades são considerados. Os fluidos estão separados, conforme explicado nos capítulos anteriores, por uma interface abrupta. O reservatório onde os fluidos se localizam é homogêneo e isotrópico. O sumidouro é localizado na zona de óleo, concentrado em um único ponto, e extrai o óleo a uma taxa constante. O problema considerado é bidimensional.

Para permitir a análise do fenômeno do cone de água, foi desenvolvido um código em linguagem Matlab que simula a extração de óleo em um ambiente com as características citadas acima. Em tal código, foram utilizados a formulação do MEC para sub-regiões e elementos de contorno lineares contínuos. A montagem das matrizes de influência foi feita utilizando o procedimento de integração analítica de seus componentes, conforme mostrado neste texto.

Neste capítulo serão mostradas as condições de contorno efetivamente consideradas, o cálculo da movimentação da interface e os resultados obtidos com a simulação.

7.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO

O reservatório simulado tem formato retangular, de dimensões variáveis. As propriedades físicas do meio poroso, tais como permeabilidade absoluta e porosidade são parâmetros do programa. Também são parâmetros a massa específica e a viscosidade dinâmica de cada fluido.

As condições de contorno do problema simulado são as expressas para o problema de dois fluidos, previamente explicadas na seção 3.3.2. A aplicação destas condições de contorno ao reservatório simulado serão aqui apresentadas.

7.1.1 CONDIÇÕES DE CONTORNO DO RESERVATÓRIO

Considere-se o reservatório como mostrado na Fig. 7.1.

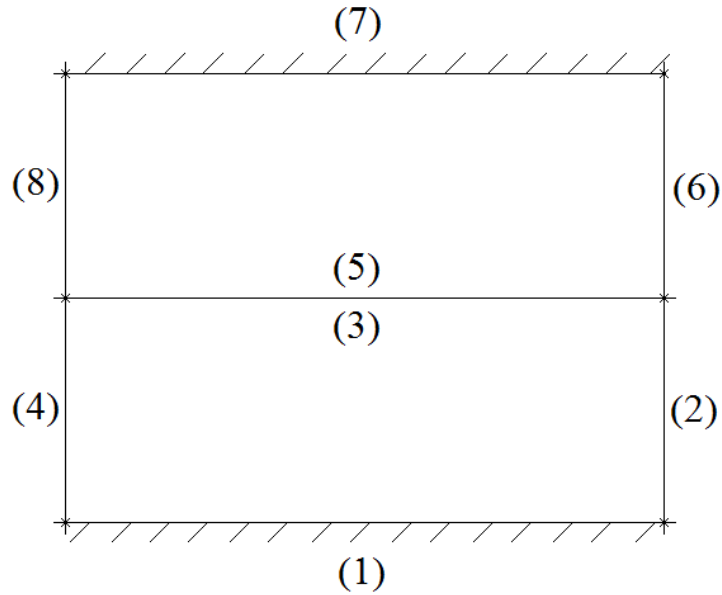


Figura 7.1 – Reservatório considerado

O fluido superior é o óleo e o inferior, a água.

Os limites inferior (1) e superior (7) do reservatório são paredes impermeáveis. Isto leva à condição de contorno de fluxo igual a zero na direção normal a estas paredes.

Assim,

$$\mathbf{q}_1 \cdot \hat{n}_1 = 0 \quad (7.1)$$

$$\mathbf{q}_7 \cdot \hat{n}_7 = 0 \quad (7.2)$$

Os potenciais são conhecidos nos limites laterais do reservatório (2), (4), (6) e (8), sendo iguais a:

$$\Phi_{\text{óleo}} = \frac{p_o}{\rho_o g} + z_o \quad (7.3)$$

$$\Phi_{\text{água}} = \frac{p_w}{\rho_w g} + z_w \quad (7.4)$$

Assim, tem-se:

$$\Phi_2 = \Phi_4 = \Phi_{\text{água}} \quad (7.5)$$

$$\Phi_6 = \Phi_8 = \Phi_{\text{óleo}} \quad (7.6)$$

Com as Eq.(7.1), (7.2), (7.5) e (7.6), têm-se as condições de contorno para todo o contorno externo do reservatório.

7.1.2 EQUAÇÕES DE ACOPLAMENTO DA INTERFACE

Potencial

Quando o reservatório se encontra em repouso, isto é, sem a ação do sumidouro, o potencial na interface é igual ao potencial em qualquer ponto do fluido em questão. Por exemplo, o potencial em um ponto exatamente abaixo da interface é igual ao potencial da massa de água em repouso, que é o mesmo para toda a sub-região que contém a água. De forma análoga, o mesmo é válido para o óleo. Quando o sumidouro está ativo, porém, o potencial na interface é desconhecido, assim como em qualquer ponto interno do reservatório, com exceção das paredes laterais.

Como o potencial de um fluido depende de sua massa específica, pode-se deduzir das Eq.(7.3) e (7.4) que existe um salto de potencial na interface, de forma que não se pode aplicar a equação de compatibilidade de potenciais dada pela Eq.(6.1).

Uma nova equação de compatibilidade de potenciais é necessária. Faz-se o uso da continuidade do campo de pressão ao longo de todo o reservatório. Fazendo $p_o = p_w = p$ e $z_o = z_w = z$ nas Eq.(7.3) e (7.4), tem-se:

$$(\Phi_o - z)\rho_o g = (\Phi_w - z)\rho_w g \quad (7.7)$$

Dividindo a Eq.(7.7) por $\rho_o g$, tem-se:

$$\Phi_o - z = (\Phi_w - z) \frac{\rho_w}{\rho_o} \quad (7.8)$$

A Eq.(7.8) pode ser reescrita como:

$$\Phi_o - \alpha \Phi_w = (1 - \alpha)z \quad (7.9)$$

onde

$$\alpha = \frac{\rho_w}{\rho_o} \quad (7.10)$$

A Eq.(7.9) é a equação de compatibilidade de potenciais para uma interface entre dois fluidos imiscíveis. Assim, para o reservatório da Fig. 7.1, tem-se:

$$\Phi_5 - \alpha \Phi_3 = (1 - \alpha)z \quad (7.11)$$

Fluxo

Conforme já exposto na seção 6.1.1, a interface é uma fronteira abrupta, onde se considera que os dois fluidos imiscíveis estão sempre em contato um com o outro. Existe um fluxo calculado na direção normal à interface. Este fluxo deve ter a mesma magnitude em ambos os lados da interface, porém, sentidos contrários. Desta forma, garante-se que não haverá vazios nem sobreposições entre os fluidos. Isso leva a uma equação análoga à Eq.(6.2):

$$\mathbf{q}_3 \cdot \hat{n}_3 = -\mathbf{q}_5 \cdot \hat{n}_5 \quad (7.12)$$

A Eq.(7.12) é a equação de equilíbrio de fluxos para uma interface entre dois fluidos imiscíveis.

A interface, como já dito, é uma linha de corrente do escoamento e, como tal, não existe fisicamente nenhum fluxo normal a ela. O que garante a coerência desta situação aparentemente contraditória é simples: o fluxo calculado não atravessa a linha de corrente, mas a movimenta na direção em que o fluxo aponta. Esta compreensão possibilita que o código desenvolvido calcule a movimentação da interface devido à ação do sumidouro.

Com as Eq.(7.11) e (7.12) têm-se as equações de acoplamento para a interface entre a água e o óleo.

7.2 MOVIMENTAÇÃO DA INTERFACE

Foi mostrado que o fluxo calculado na interface é, na verdade, a velocidade do fluido que a define. É possível, então, deduzir a equação que define a posição da interface em função deste fluxo. Considere, para este caso, que exista uma função F , definida por:

$$F = z - \eta(x, t) = 0 \quad (7.13)$$

onde $\eta(x, t)$ é a função que expressa a altura da interface para uma determinada coordenada x e um certo tempo.

Como a interface é uma linha de corrente, ou seja, uma linha material, pode-se fazer:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \nabla F = 0 \quad (7.14)$$

onde θ é a porosidade do meio (constante).

Substituindo a Eq.(7.13) na Eq.(7.14), tem-se:

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot (\nabla z - \nabla \eta) = 0 \quad (7.15)$$

Explicitando a variação de η no tempo, tem-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\theta} [\mathbf{q} \cdot \nabla z - \mathbf{q} \cdot \nabla \eta] \quad (7.16)$$

Sabendo que $\nabla z = \hat{e}_z$, pode-se fazer:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\theta} [\mathbf{q} \cdot \hat{e}_z - \mathbf{q} \cdot \nabla \eta] \quad (7.17)$$

A Eq.(7.17) é a equação que define a variação da posição (em z) de um determinado ponto da interface. Há de se notar que esta equação inclui uma parcela linear, dada por $\mathbf{q} \cdot \hat{e}_z$, e uma parcela não linear, dada por $\mathbf{q} \cdot \nabla \eta$. Neste trabalho está sendo desconsiderada a contribuição não linear para o deslocamento da interface. A implementação desta parcela é aconselhada como um trabalho futuro.

Desprezando-se a parcela não, linear, obtém-se:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \hat{e}_z \quad (7.18)$$

A Eq.(7.18) é a equação utilizada neste estudo para a simulação da movimentação da interface entre os dois fluidos. A implementação desta equação no código desenvolvido, porém, deve ser feita de forma a levar em conta o tamanho do passo de tempo utilizado nas iterações. Escrevendo a Eq.(7.18) em termos de diferenças finitas, temos:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{\theta} (\mathbf{q} \cdot \hat{e}_z)_n \Delta t \quad (7.18)$$

onde z é a altura da interface, Δt é o tamanho do passo de tempo e os sub-índices n e $n + 1$ indicam o passo de tempo atual e o imediatamente próximo.

7.3 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Condição inicial

Inicialmente, têm-se as condições de contorno prescritas, conforme demonstrado na seção 7.1. No instante de tempo $t = 0$, assume-se que a interface coincide com a horizontal.

Iteração para cada passo de tempo Δt

O código desenvolvido resolve o problema potencial decorrente deste cenário, calculando os potenciais e os fluxos em todo o contorno e na interface. A próxima etapa é o cálculo da nova posição

da interface. Para isso, leva-se em conta o fluxo calculado, aplicando-o na Eq.(7.18). Como resultado, são obtidas as coordenadas de cada ponto da interface ao final do intervalo de tempo Δt .

Estabelecem-se, então, para a próxima iteração, um novo cenário. As condições de contorno são as mesmas que foram prescritas inicialmente. A posição da interface, agora, não é mais assumida como horizontal, mas sim determinada pelas coordenadas calculadas.

O programa resolve o problema potencial decorrente deste novo cenário e realiza o cálculo da nova posição da interface. Todo este procedimento é repetido pelo número de passos de tempo indicado como parâmetro.

Com isto, pode-se obter a evolução da interface ao longo do tempo.

7.4 RESULTADOS OBTIDOS

O reservatório simulado tem dimensões $5 \times 4 \text{ m}$. A zona de água tem altura de 2 m e a zona de óleo, outros 2 m . A permeabilidade absoluta do meio poroso é de 5000 darcy e sua porosidade é $0,9$.

A massa específica da água foi adotada como 1000 kg/m^3 e sua viscosidade dinâmica, $1,003 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$.

A massa específica do óleo foi adotada como 80% da massa específica da água e sua viscosidade dinâmica, 10 vezes a da água.

O sumidouro tem intensidade $9 \times 10^{-4} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) / \text{m}$ e foi localizado nas coordenadas $(x = 2,5 \text{ m}, y = 3,5 \text{ m})$.

Foram adotados dois passos de tempo diferentes, 5 s e 50 s , para permitir a comparação entre seus resultados. O tempo de análise foi de 20000 s .

Os resultados são mostrados pelas figuras a seguir. A Fig. 7.2 mostra a geometria e as condições de contorno do problema. A Fig. 7.3 mostra a posição da interface ao final do tempo de análise. A Fig. 7.4 mostra a posição do ponto central da interface ao longo do tempo de análise.

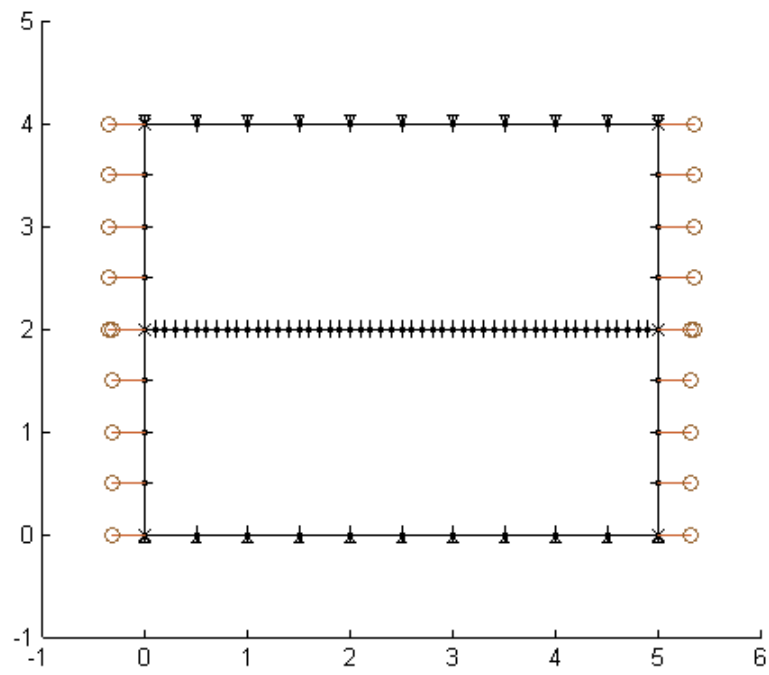


Figura 7.2 – Geometria e condições de contorno do problema simulado

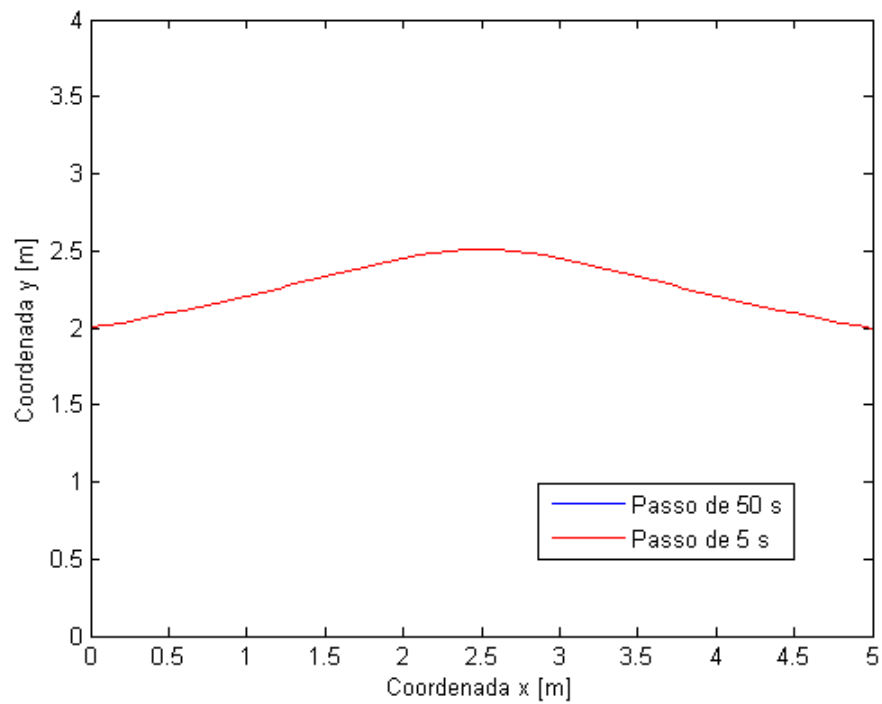


Figura 7.3 – Posição da interface ao final do tempo de análise

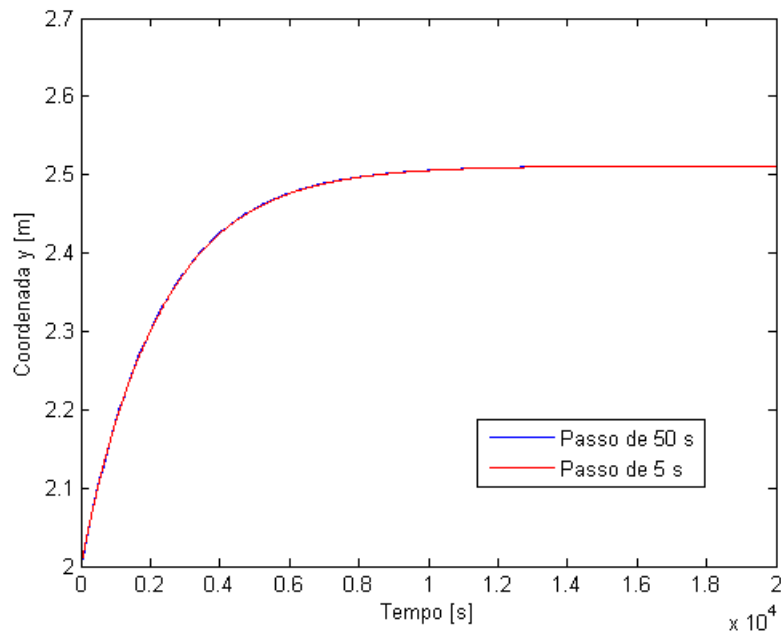


Figura 7.4 – Posição do ponto central da interface ao longo tempo

7.5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos são coerentes com o que ocorre fisicamente. Uma comparação com resultados analíticos e experimentais ainda é necessária de modo a validar os resultados obtidos.

É interessante notar que a variação do passo de tempo, mesmo em uma ordem de grandeza, não alterou significativamente os resultados. Isso mostra que o algoritmo utilizado é bastante estável em relação ao tamanho do passo de tempo. Esta característica permite a utilização de passos de tempo relativamente grandes, o que beneficia o custo computacional da análise numérica. Faz-se necessário ressaltar que, apesar da possibilidade de utilizar passos de tempo grandes, existe um limite para o tamanho destes. Pela análise da Eq.(7.18), pode-se perceber que a escolha de passos de tempo demasiadamente grandes para o problema em questão pode levar a um cálculo da posição da interface que não coincide com a realidade. Surge, então, a necessidade de encontrar o tamanho do passo de tempo ideal para cada cenário simulado.

8 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este estudo reuniu as características-chave e informações a respeito do fenômeno do cone de água em poços de petróleo. Foi analisado o modelo matemático sobre o qual foi desenvolvida a formulação do método dos elementos de contorno para o estudo de tal fenômeno, bem como as condições de contorno pertinentes.

Uma primeira análise do problema mostrou que o método dos elementos de contorno é uma ferramenta à altura do estudo proposto. Ficou evidenciado pelo trabalho de vários autores que este método é eficaz no tratamento de problemas potenciais, como o escoamento de fluidos em meios porosos.

Fica fundamentado na literatura que a integração analítica dos elementos das matrizes de influência da formulação do MEC, aliada à utilização de elementos lineares contínuos, é uma estratégia eficaz para o aumento do desempenho dos algoritmos implementados. Consequentemente, este tipo de integração contribui para a diminuição dos custos computacionais envolvidos.

A formulação do MEC para sub-regiões para problemas potenciais foi validada a partir da comparação de seus resultados com outros resultados numéricos e também com resultados analíticos.

O código para a simulação da extração de petróleo em reservatórios contendo dois fluidos (óleo e água) foi desenvolvido, seguindo as bases teóricas aqui apresentadas. Em tal código, foram utilizados a formulação do MEC para sub-regiões e elementos de contorno lineares contínuos. A montagem das matrizes de influência foi feita utilizando o procedimento de integração analítica de seus componentes, conforme mostrado neste texto.

Os resultados obtidos com a utilização do código desenvolvido neste trabalho são qualitativamente coerentes com o que ocorre fisicamente. Contudo, ainda não foi possível a comparação dos resultados obtidos com resultados analíticos e experimentais de forma a validar quantitativamente o programa.

Foi mostrado que a escolha do passo de tempo não influencia na qualidade dos resultados obtidos. Foram obtidos os mesmos resultados utilizando passos de tempo de ordens de grandeza diferentes (5 s e 50 s).

Futuramente, podem-se comparar os resultados obtidos neste trabalho com resultados analíticos e também com resultados experimentais obtidos da operação da célula de Hele-Shaw com dois fluidos.

Este trabalho lança as bases para o desenvolvimento de um código que permita o estudo do fenômeno do cone de água em três dimensões. Além disso, podem-se incluir no modelo utilizado alguns fenômenos não considerados neste trabalho, como *fingering*, meios heterogêneos e anisotrópicos, permeabilidade relativa e não-linearidades presentes na movimentação da interface.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Banerjee, P. K., 1981, *Boundary element methods in engineering*. McGraw-Hill. 2ed.
- [2] Bear, J., 1972, *Dynamics of fluids in porous media*. American Elsevier.
- [3] Braga, Luciana Moreira, 2012. *O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de Condução de Calor*. Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Publicação MTARH.DM - 17 A/11, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 114p.
- [4] Cavalcante, J. R., 1996, *Previsão de comportamento de cone de água*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas.
- [5] Kane, James H., 1994, *Boundary element analysis in engineering continuum mechanics*. Prentice-Hall.
- [6] Kikuchi, M. M., 1997, *Otimização de parâmetros de produção para minimizar os efeitos de cone de água*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas.
- [7] Liggett, James A. and Liu, Philip L.-F., 1983, *The boundary integral equation method for porous media flow*. George Allen & Unwin.
- [8] Thomas, J. E., 2004, *Fundamentos de engenharia de petróleo*. Interciência. 2ed.
- [9] Zhang, H., Barry, D.A. and Hocking, G.C., 1999, Analysis of continuous and pulsed pumping of a phreatic aquifer. *Advances in Water Resources*, V22, No. 6, 623-632.